Un soupçon de théorie des groupes: groupe des rotations et groupe de Poincaré

D.E.A. “Champs, Particules, Matières”, 1995 - 1996

dernière modification: Octobre 1997

B. Delamotte
LPTHE, Université Paris 7 - Denis Diderot
Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie
Tour 24-14, 5$^{\text{ème}}$ ét., 75251 Paris Cedex 05
delamotte@lpthe.jussieu.fr, 01 44 27 39 92

http://www.lpthe.jussieu.fr/DEA/

"Désordre du temps passé,
Moi, pour dissiper la nuit,
J'ai risqué tout mon sommeil."
P. Eluard

Préface

Ce cours de théorie des groupes n'en est en fait pas vraiment (vraiment pas ?) un. De nombreux développements importants sont absents, comme par exemple la classification des groupes compacts semi - simples. Rien n'est dit, ou presque, à propos des représentations de masse nulle du groupe de Poincaré, de la théorie des caractères ni non plus à propos de techniques de calcul, comme par exemple celle des tableaux d'Young. Le but de ce cours est de toute façon ailleurs : il vise autant à dire le pourquoi des choses que le comment, à montrer les liens et les dissemblances entre concepts, par exemple entre concepts classiques et quantiques et finalement à fournir au lecteur assidu de ces pages, les bases nécessaires tant physiques que mathématiques, à la lecture de la littérature mathématiquement plus avancée. Ces notes ne dispensent donc en aucune façon de la lecture des bons ouvrages et, si elles sont à la hauteur de l'ambition de leur auteur, elles devraient en revanche donner le discernement qui permet d'éviter les mauvais.

Ces notes sont basées sur la première partie d'un cours de théorie quantique des champs effectué plusieurs années durant au DEA "Champs, Particules, Matières" des universités Paris 6, Paris 7 et Paris 11. Il repose donc sur un a priori, celui d'introduire les concepts et techniques de calcul nécessaires pour la suite de ce cours. J'ai également souhaité être le plus rigoureux possible — au sens des physiciens — en essayant de donner, à chaque fois que faire se pouvait, le sens qualitatif des concepts exposés et en souhaitant que le lecteur soit plus convaincu par les arguments donnés que par des preuves qui n'auraient pas leur place ici.

Si le courage ne me fault, une suite en deux chapitres devrait succéder, dans les années à venir, à celui-ci : théorie quantique des champs libres, théorie des perturbations et électrodynamique quantique.

Je souhaiterais que ce cours soit évolutif. J'entends par là qu'étant sur internet (l'adresse est en page de garde), je devrais pouvoir constamment l'améliorer tout en le laissant à la disposition permanente des lecteurs. Donc, si d'aventure un de ceux ci, intéressé par l'amélioration de ces notes, souhaite me faire part de ses critiques ou suggestions, je serais heureux de les examiner et de les inclure éventuellement dans une version corrigée. Je suis bien entendu intéressé par toute remarque (écrite de préférence), de la plus petite à la plus grande. Mon adresse électronique est donnée en page de garde de ces notes.

Et maintenant, voici une bibliographie (très restreinte) :

P. Ramond : *Field Theory : A Modern Primer*, second edition, Frontiers in Physics, Addison - Wesley, 1989.

Un ouvrage recommandable. Fait une petite introduction au groupe de Lorentz très efficace. La partie théorie des champs est assez bien faite à quelques exceptions près (le théorème spin - statistique est ni plus ni moins omis!).

L. Fonda et G.C. Ghirardi : *Symmetry Principle in Quantum Physics*, Marcel Dekker, Inc. New York 1970.

Très original dans sa présentation. Devient un peu pesant quand il passe à l'équation de Dirac. En fait, presque toute la partie quantique de ces notes est inspirée de ce livre.

S. Weinberg : *The quantum theory of fields*, Volume I, Cambridge University Press, 1995.

Appelé à devenir un classique. Voilà (enfin et de nouveau !) un livre de théorie des champs où l'on voit quelqu'un penser. Ca n'est pas fréquent et tendait à disparaître ! D'un niveau un peu avancé pour un débutant... et très rapide sur la partie groupe quoique la notion de symétrie soit au cœur de son exposé.

P. W. Atkins : *Molecular quantum mechanics*, 2^{nd} edition, Oxford University Press, 1983.

Plus un livre de mécanique quantique que de théorie des groupes. Traite surtout des groupes discrets et de leur utilité en physique atomique et moléculaire. Toute la distinction anglo - saxonne. Que c'est beau ! ...

S. Sternberg : *Group theory and physics*, Cambridge University Press, 1994.

Comme son nom l'indique. . . Un vrai penchant pour les maths avec cependant (c'est rare) de la vraie physique. Parfois déroutant : parler du groupe de Lorentz dans un chapitre intitulé "vibrations moléculaires et fibrés vectoriels" n'est pas tout à fait commun. . .

Et puis de nombreux cours m'ont inspiré. Les cours d'Alain Laverne de mécanique quantique et de théorie des champs effectués à l'ex DEA de Physique Nucléaire d'Orsay et au DEA "Champs, Particules, Matières" ainsi que les très nombreuses discussions que j'ai eues avec lui ont largement contribué à ma compréhension du sujet. Certains arguments présentés dans ces notes lui sont entièrement dus[1]. J'ai également été un lecteur assidu des notes du cours de DEA de "Physique Quantique" de F. Laloë intitulées "*Les symétries en mécanique quantique*". L'encadré IV de ce cours est tout droit issu du cours de G. Mahoux "*Cinématique relativiste*" effectué à Orsay en 1970-1971.

Ces notes ont beaucoup profité des critiques de nombreux étudiants de DEA et de collègues. Je tiens à les en remercier vivement. Je remercie tout particulièrement M. Caffarel, A. Laverne,

1. Merci Monsieur Laverne.

E. Kahn, P. Lecheminant et D. Mouhanna qui ont consacré beaucoup de temps et d'énergie à me lire et à me suggérer moult modifications. La typographie de ces notes doit beaucoup à D. Lederer qui m'a façonné un style LateX sur mesure. L. Laloux a réduit une à une les difficultés d'Unix, de Mac Intosh, de polices de caractères, d'impression, etc... Quel cauchemar tout cela aurait été sans lui...

Pour finir, je ne peux pas résister au plaisir de citer H.J. Lipkin dont les deux phrases suivantes écrites en 1970 ont souvent accompagné mes pensées :

"A survey of the literature in theoretical particle physics in the past decade would probably indicate that there is more misuse than use of group theory. The authors either know too little group theory or too much."

"I have often wondered why it took so many years from the discovery of strangeness to the proposal of unitary symmetry. [...] Evidently physicists active in strange-particle physics knew very little group theory while those familiar with group theory knew very little about strange particles."

Table des matières

CHAPITRE 1

Les prolégomènes

I DE L'INTÉRÊT DE LA NOTION DE SYMÉTRIE

Pourquoi diable un physicien normal devrait-il s'intéresser à la notion de symétrie et à la théorie des groupes ? Aujourd'hui, un cristallographe, un atomiste et un physicien des particules auraient probablement des idées assez différentes sur le sujet. Qui plus est, ces idées ont beaucoup changé avec le temps car suivant les époques la communauté physicienne n'a pas toujours pensé de la même façon, ni accordé la même importance à la notion de symétrie, importance qui d'ailleurs n'a été reconnue que tardivement. Il est instructif, à cet égard, de se souvenir que la loi de conservation de l'énergie a été découverte dans le cadre de la thermodynamique au dix neuvième siècle (premier principe) et non comme une conséquence de l'invariance par translation dans le temps – ce qu'elle est en fait. On peut maintenant, avec le recul des années, se rendre compte que la plupart des lois fondamentales trouvées empiriquement, de Newton à Maxwell et à Schrödinger, sont des conséquences quasi obligatoires de symétries sous jacentes aux théories physiques [1]. Cependant, à quelques exceptions (importantes) près dont je parlerai dans la suite, les symétries n'ont été d'aucune utilité pratique dans la découverte des lois physiques probablement parce que leur maniement était trop abstrait et éloigné des phénomènes sensibles. [2]. Ça n'est donc bien souvent qu'après coup que l'on a pu réinterpréter les lois physiques en question en termes de symétries et en apprécier toute l'importance. De toute façon, mise à part la gravitation où l'invariance par changement de coordonnées a effectivement servi

1. En fait du mélange de symétries et de principes fondamentaux de la physique : principes quantiques, principe de moindre action, causalité, localité, etc... On consultera avec profit à ce sujet Landau et Lifschitz "Mécanique" où il est montré que le principe fondamental de la dynamique : $\vec{F} = m\vec{a}$ est une conséquence quasi-obligatoire de l'invariance galiléenne et du principe de moindre action.

2. Maxwell, par exemple, avait une vision épouvantablement mécaniste de l'électromagnétisme, faite de roues dentées et d'engrenages, rien qui ne ressembla à une quelconque invariance de jauge, fondement pourtant universellement reconnu aujourd'hui de l'électrodynamique. On peut effectivement montrer que cette théorie est une conséquence quasi-obligatoire de l'invariance de Lorentz et d'une symétrie, dite de jauge, stipulant que le quadri-potentiel électromagnétique, formé du potentiel scalaire et du potentiel vecteur, est défini à un quadri-gradient près. C'est ce qui impose de faire un choix de jauge, Coulomb, Lorentz, etc... lorsqu'on veut faire des calculs. Quant à la pertinence physique des théories de jauge, elle est très fortement reliée à la structure quantique des interactions (renormalisabilité) entre particules élémentaires. En un mot, ceci provient du fait que les seules interactions qui restent suffisamment fortes à "basse énergie", i.e. aux énergies expérimentalement accessibles, pour jouer un rôle sont celles fondées sur des symétries de jauge (à quelques exceptions près : interaction de Yukawa ou en ϕ^4 par exemple).

de guide à Einstien pour bâtir sa théorie, la notion de symétrie était en général confiné à un rôle purement descriptif comme par exemple pour la classification des cristaux (Pasteur fut probablement un des premiers à utiliser la notion de structure de la matière et de symétrie miroir avec les sucres dextrogyres et lévogyres).

C'est en fait vers le milieu des années cinquante avec Yang et Mills que l'on a assisté en physique des particules à un changement de paradigme lorsque les physiciens de ce domaine ont compris qu'ils pouvaient utiliser les symétries non plus simplement de manière descriptive mais de manière *constructive* pour bâtir de nouvelles théories de particules en interaction (les théories de jauge). Pour cette physique, la possibilité offerte par les symétries de sélectionner un jeu en définitive très restreint de lois admissibles pour décrire les interactions entre particules dans l'ensemble, a priori infini, des équations que l'on peut imaginer, a ramené en grande partie le problème de la détermination des interactions fondamentales à celui des symétries sous tendant ces interactions[3] (modèle standard des interactions électrofaibles, chromodynamique, théories supersymétriques, etc. . .). On conçoit dès lors l'intérêt essentiel des symétries dans ce domaine.

Une deuxième caractéristique des symétries, également très importante, est l'existence de *quantités conservées* dans le temps qui leur sont associées (pour les symétries continues, voir la suite). C'est le cas, par exemple, des symétries de l'espace-temps : la conservation de l'énergie pour un système isolé quelconque est une conséquence de la symétrie de translation dans le temps (et non d'une propriété spécifique du système[4]), celle de l'impulsion une conséquence de l'invariance par translation dans l'espace, celle du moment cinétique une conséquence de l'invariance par rotation[5], etc. . .

Les deux propriétés majeures précédemment énoncées, contraintes sur les lois possibles et existence de quantités conservées, ne sont pas indépendantes car, pour un système donné, l'existence même de quantités conservées est une contrainte sur la dynamique de ce système : les trajectoires des molécules d'un gaz, par exemple, pour erratiques qu'elles soient, sont telles qu'à chaque instant, l'énergie du gaz reste inchangée. Ces contraintes peuvent donc logiquement déterminer tout ou partie de la dynamique du système.

3. Il ne faudrait pas en déduire que les modèles fondés sur des symétries de jauge sont univoquement déterminés par ces symétries. Parmi les paramètres non contraints par les symétries, on trouve la force des interactions, le contenu en particules de la théorie et les masses des particules, le schéma de brisure spontanée (voir la suite). C'est évidemment un fantasme de la communauté d'imaginer qu'il existe une théorie — LA théorie — qui n'aurait aucun paramètre libre et qui serait entièrement déterminée par un principe de symétrie. Cette TOE (theory of everything), beaucoup ont cru l'avoir trouvée ces vingt dernières années. . .

4. De ce fait, la notion de symétrie, et son corollaire les lois de conservation, sont peut être les seuls concepts qui "traversent" la physique et se retrouvent aussi bien en physique des particules qu'en astronomie et d'ailleurs aussi en biologie ou en chimie.

5. La charge électrique est également une quantité conservée associée à une symétrie – la symétrie de jauge mentionnée dans la note numéro 2 en bas de page – qui, elle, n'a, pense t'on, rien à voir avec la structure de l'espace-temps.

Ces notes de cours (et leur suite non encore rédigées) vont raconter comment les symétries de l'espace-temps (rotations, translations et transformations de Lorentz) alliées à la théorie quantique déterminent entièrement, pour les particules libres, l'ensemble des dynamiques physiquement acceptables. En fait, comme on peut le voir sur la théorie quantique des champs libres, même la notion de particule élémentaire – et d'anti-particules – n'a pas à être explicitement introduite : elle est une conséquence quasi-obligatoire des équations quantiques et invariantes de Lorentz que nous serons amenés à écrire ! Comme nous l'avons déjà mentionné, cette démarche constructive s'étend ensuite aux théories quantiques décrivant les particules en interaction grâce aux symétries de jauge [6].

Nous allons donc dans la suite adopter comme point de vue de *construire* les théories quantiques relativistes de Lorentz *à partir des symétries*. Ce faisant, nous trahirons le processus historique de la découverte puisque nous ne chercherons pas à décrire quoi que soit mais à construire a priori des équations répondant seulement à des exigences de symétrie (et aux principes quantiques). Evidemment, et c'est là la beauté de la chose, ce jeu qui pourrait paraître stérile, ne l'est en fait pas car nous nous attaquons à des systèmes simples – au sens d'élémentaires – pour lesquels les symétries sont suffisantes pour tout déterminer. Plus explicitement, nous postulerons que les équations d'évolution des champs [7](quantiques on non) de Dirac, Maxwell, etc... dérivent d'un principe de moindre action, i.e. sont les équations d'Euler - Lagrange de lagrangiens bien choisis :

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial(\partial\phi/\partial x_\mu)} = 0 \qquad \text{(I\_1)}$$

avec L= lagrangien et ϕ= champ(s) de Dirac, Maxwell, etc...

Le problème de trouver toutes les dynamiques possibles est ainsi ramené à celui de la détermination de tous les lagrangiens et de tous les types de champs qui peuvent être physiquement pertinents. Pour une raison qui sera claire dans la suite, les seuls lagrangiens (en fait les actions) qui sont susceptibles de conduire à des équations physiquement acceptables sont ceux qui sont *invariants* sous les symétries de la Nature, les symétries de l'espace - temps en

6. Exception notable, la gravitation qui résiste toujours à une description quantique. Là, la solution choisie par une grande partie de la communauté est plus radicale : abandonner la théorie des champs au profit de la théorie des cordes qui s'avère être un peu plus coriace mais qui fera très probablement jouer à la notion de symétrie un rôle de tout premier plan. Il est vrai aussi que les théories des (super-) cordes se sentent à leur aise essentiellement dans un espace - temps de dimension dix...

7. On peut justifier assez simplement qu'il faut considérer des champs d'opérateurs dans le domaine quantique et relativiste de Lorentz car il est très difficile d'avoir un formalisme explicitement covariant sans utiliser de champs. La difficulté conceptuelle qu'il y a à admettre que la bonne mathématisation d'objets discrets comme des particules passe par des objets continus comme les champs se résout en reconnaissant qu'elles apparaissent dans le spectre des hamiltoniens comme des excitations des champs et non comme les champs eux mêmes.

tout premier lieu. Cette invariance sera notre seul guide[8]. Tout notre travail à venir a donc en définitive un seul but : construire tous les champs (scalaires, spinoriels, quadri-vectoriels, etc. . .) qui entreront dans nos lagrangiens et tous les invariants fonctions de ces champs qui seront les lagrangiens eux mêmes. La dynamique des théories obtenues et leur interprétation en termes de particules[9] seront des conséquences inévitables des équations d'Euler - Lagrange et du spectre des hamiltoniens déduits de ces lagrangiens ! Le cas le plus simple, celui des particules libres, aura le bon goût de nous fournir les dynamiques exactes de ces particules et qui serviront de point de départ à l'étude des particules en interaction. Dans ce contexte, la formalisation mathématique de la notion de symétrie est un des exemples les plus frappants de "l'absurde efficacité des mathématiques" (Wigner).

Mais avant cela, encore un mot général sur la notion de symétrie.

A Brisure spontanée et brisure explicite de symétrie

On pourrait a priori s'étonner des propos que je tiens précédemment. Après tout, si l'existence de symétries était contraignante au point de déterminer presque entièrement la dynamique des systèmes, cela devrait nous crever les yeux. Or ça n'est pas le cas. Pourquoi n'en est il pas ainsi? Il y a à cela de multiples réponses. Je voudrais juste en exposer trois.

1) Tout d'abord, les lois de conservation issues des principes de symétrie ne sont que globales. Par exemple, seule l'énergie totale d'un système isolé est conservée, mais il n'en va pas de même en général pour chacun de ses sous systèmes. Ainsi, lorsqu'on étudie un système en interaction avec son environnement, il se peut qu'aucune quantité relative au système (son énergie interne, son impulsion, etc. . .) ne soit conservée. Il peut néanmoins exister des situations où l'on parvient à isoler très bien un système de son environnement et dans ce cas les lois habituelles de conservation valent indépendament pour le système et pour le reste de l'univers. Mais la notion de "système isolé" est en fait relative à une quantité conservée donnée. Ainsi, on sait bien isoler énergétiquement un système en le mettant dans une boîte ayant des parois adiabatiques, mais il est beaucoup plus difficile de le faire pour ce qui est de l'impulsion: une fois que l'on a mis un gaz dans une boîte posée sur une table, il peut échanger de l'impulsion avec un réservoir "infini" – la terre – via les parois de la boîte[10].

2) Dans les systèmes à grand nombre de corps, on sait que même un couplage très faible avec l'environnement peut bouleverser la dynamique microscopique du système (l'interaction gravitationnelle des molécules d'un gaz avec un électron placé à l'autre bout de la galaxie

8. A condition de supposer que nous pouvons nous limiter aux théories quantiques, causales, lagrangiennes et locales des champs.

9. Attention au photon !

10. C'est pour cela que dans l'approche microcanonique de la mécanique statistique, on ne suppose jamais fixée l'impulsion du système.

est suffisante pour complètement modifier, sur un temps microscopique, les trajectoires des molécules du gaz). Dans ce cas, seule une approche statistique est viable si bien que les lois de conservation peuvent grandement perdre de leur intérêt quand bien même elles sont vérifiées à une très bonne approximation (l'impulsion totale d'un gaz dans une boîte est nulle à de très petites fluctuations près et pourtant il ne s'agit pas d'une quantité pertinente).

3) Dans les deux cas précédents, les lois de conservation relatives à un système étaient explicitement violées à cause du couplage à l'environnement. On parle alors de brisure explicite de symétrie : dans l'hamiltonien décrivant ce système, on doit incorporer un terme de couplage avec l'extérieur qui ne respecte pas certaines symétries. Il existe toutefois des cas où un problème (un hamiltonien H par exemple) possède une symétrie sans que ses solutions la possède (l'état fondamental de H par exemple). Voici un exemple. Cherchons le trajet le plus court reliant quatre points situés au sommet d'un carré. Le problème ainsi posé possède évidemment la symétrie du carré. On trouve néanmoins deux solutions dont aucune n'a la symétrie du carré (aucune des deux figures n'est invariante par symétrie miroir par rapport à AC par exemple) :

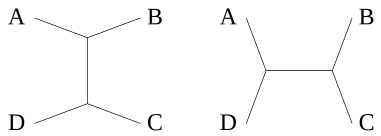

FIG. 1.1 - *Les deux chemins les plus courts reliant les sommets du carré ABCD*

On peut se convaincre cependant que l'ensemble des solutions doit être globalement invariant sous les opérations de symétrie du carré (à partir d'une solution, on engendre obligatoirement une solution — autre ou identique — par action des opérations de symétrie du carré). Bien sûr, une fois choisie une solution, il n'est plus du tout évident de se rendre compte qu'elle est issue d'un problème possédant des symétries plus grandes. On parle dans ce cas de brisure spontanée de symétrie. Les cas de brisure spontanée de symétrie sont nombreux dans la nature: les positions d'équilibre d'un crayon sur une table horizontale (une instable : le crayon vertical, une infinité de stables : le crayon couché sur la table), l'aimantation spontanée d'un corps ferromagnétique en dessous de sa température de Curie, les cristaux liquides, le modèle de Weinberg - Salam, etc. . . Pour ces systèmes, les symétries existantes sont cachées et ne nous crèvent donc pas les yeux. La notion de brisure spontanée de symétrie joue un rôle considérable tant en physique des particules, qu'en mécanique statistique, en physique du solide, en hydrodynamique, etc. . .

Et maintenant, formalisons un peu tout cela.

II DÉFINITION DE LA NOTION DE GROUPE DE SYMÉTRIE ET DE REPRÉSENTATIONS D'UN GROUPE

En physique, la notion de symétrie est directement reliée à celle d'invariance. Ici, deux exemples et un petit avertissement.

• Un carré est dit posséder un groupe[11] de symétrie car il est invariant sous l'ensemble des transformations : rotations d'angle $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, symétries miroir par rapport aux diagonales et aux médiatrices[12]. Dans ce cas, c'est le "système" lui-même qui est invariant sous le groupe de transformation.

• L'invariance de la physique sous le groupe des translations signifie qu'une expérience effectuée dans un vaisseau spatial (moteur coupé et loin de toute matière) est indépendante de la position du vaisseau[13]. Ici ce n'est pas le système qui est invariant puisqu'il est translaté, ce sont les "équations du mouvement" du système qui le sont (seules les positions initiales changent, pas l'évolution). On voit sur cet exemple qu'en physique *symétrie signifie le plus souvent non pas invariance du système mais invariance des lois physiques.*

Il n'est pas inintéressant non plus de noter que symétrique signifie " non distinguable" ou encore "inobservable". Prenons en effet l'exemple d'habitants d'un monde unidimensionnel ayant la forme d'un carré. Imaginons que deux habitants de ce monde se téléphonent et essayent de se communiquer leur adresse (position) sur le carré. Ils peuvent chacun se dire à quelle distance ils sont de l'angle le plus proche, mais ils ne peuvent en aucune manière spécifier sur quel côté du carré ils sont, car les quatre côtés, qui sont échangés par les diverses opérations de symétrie du carré, sont absolument indiscernables. La seule solution pour se repérer sur le carré est de planter un poteau en un point quelconque du carré et d'indiquer un sens de rotation. Ainsi toutes les distances peuvent être calculées à partir de cette origine. Mais planter un poteau, c'est précisément briser la symétrie du carré. Il est bon de comprendre qu'il en va de même "dans la vie de tous les jours". Dire que la physique est invariante par translation, ça n'est pas dire que l'univers qui nous entoure est le même partout : quiconque s'est cogné contre un mur devrait en être convaincu. L'univers qui nous entoure n'est pas invariant par

11. groupe = ensemble G muni d'une loi de composition (souvent appelée multiplication même si elle n'a rien à voir avec la mutiplication des réels) possédant les quatre propriétés suivantes : 1) la loi de composition est une loi interne à G, i.e. que la mutiplication de deux éléments quelconques de G donne un élément de G, 2) il existe un élément neutre, 3) tout élément possède un symétrique et 4) la loi est associative. Au fait, pourquoi les symétries d'un système physique posséderaient elles une structure de groupe ? Essentiellement parce que la composée de deux symétries doit être une symétrie, d'où la notion de loi de composition interne. Les autres propriétés, à part l'associativité, vont de soi dans la plupart des cas. Quant à l'associativité, c'est le cas général, mais je me demande bien pourquoi…

12. On peut facilement vérifier que l'ensemble de ces transformations forment un groupe.

13. Problème sans fond : que signifie loin de toute matière ?

translation : il y a des “poteaux” partout ! C'est précisément ce qui nous permet de nous repérer dans l'espace. L'invariance par translation de la physique signifie que si l'on translatait la terre (et s'il le faut pour l'expérience que nous sommes en train d'effectuer, le système solaire et la galaxie) le résultat de notre expérience serait inchangé [14].

A propos, qu'est ce qu'un groupe (pour un physicien) ?

1) C'est un ensemble de *transformations* (rotations, translations, transformations de Galilée ou de Lorentz, etc. . .)

2) et c'est une *table de multiplication* entre transformations qui vérifie les propriétés mentionnées dans la note en bas de page (12).

Mais attention, en tant que physiciens (par opposition au Très Haut), nous ne connaissons des groupes que leurs actions sur les systèmes physiques que nous étudions, i.e. que leurs actions sur les êtres mathématiques qui nous servent à les modéliser : T = température, $\vec{E}$ = champ électrique, etc. . . Il se peut donc qu'en passant d'un système à un autre, ou plutôt d'une quantité mathématique à une autre, l'action d'un même groupe soit assez radicalement différente et réserve même des surprises ! Que l'on songe à un condensateur que l'on fait tourner : la charge q de chacune des plaques ainsi que le module du champ entre les plaques restent invariants dans une rotation, alors que le champ électrique (vectoriel), lui, varie ! Les choses se compliquent encore lorsqu'on s'intéresse au tenseur d'inertie d'un corps solide et plus encore au spin d'un électron (qui nécessite l'introduction d'objets mathématiques appelés spineurs et qui ne sont ni des scalaires ni des vecteurs).

Il est important de comprendre que c'est donc moins la rotation elle même (du système physique) qui nous intéresse que les *transformations induites* par cette rotation sur les grandeurs mathématiques qui modélisent ledit système. Ces transformations induites doivent représenter, en un sens que nous préciserons par la suite, les transformations du système ainsi que leur algèbre. Ce sont elles qui peuvent être différentes suivant les quantités physiques sur lesquelles elles agissent. Ce qui va nous intéresser par la suite est donc moins la structure des groupes de transformations, que les **représentations** de ces transformations — les transformations induites — sur les grandeurs physiques.

En fait, la question est plus vaste que cela car *le choix même* des grandeurs physiques : q = singulet, $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ = triplet, etc. . . qui, comme nous le verrons, “ne se transforment pas n'importe comment”, est déjà dicté, pour ce qui est de leur nature matricielle, par *la théorie*

14. En fait la présence de la matière (terre, soleil, etc...) en un point donné de l'espace ne vient pas de propriétés spécifiques de ce point, mais de l'histoire de l'évolution de l'univers qui aurait très bien pu mettre la terre (et le système solaire) ailleurs, sans violer aucune loi de la physique. Il s'agit là aussi d'une brisure spontanée de symétrie: celle de translation.

de la représentation des groupes, ici, dans l'exemple choisi, par celle du groupe des rotations. Nous devrons donc, à la fois, trouver la nature matricielle (singulet, doublet, triplet, etc. . .) des grandeurs physiques *et* la façon dont ces grandeurs se transforment.

Nous allons maintenant définir précisément la notion de représentation d'un groupe. Appelons g_1 et g_2 deux éléments d'un groupe G (deux rotations du condensateur par exemple) et $T(g_1)$ et $T(g_2)$ les deux transformations associées à g_1 et g_2 et agissant sur une quantité physique donnée ($\vec{E}$ = champ électrique du condensateur par exemple). Il est clair que pour que l'ensemble des $\{T(g_i)\}$ représentent correctement le groupe G, *il faut que la table de multiplication de G soit préservée dans le passage des $\{g_i\}$ aux $\{T(g_i)\}$*, i.e. que la table de multiplication des $\{T(g_i)\}$ doit reproduire celle des $\{g_i\}$[15]. En d'autres termes si :

$$\begin{array}{cccccc} & g_1 & \text{suivie de} & g_2 & \text{donne} & g_3 \\ \Longrightarrow & T(g_1) & \text{suivie de} & T(g_2) & \text{doit donner} & T(g_3) \end{array}$$

soit encore :

$$T(g_2.g_1) = T(g_2).T(g_1) \tag{II\_2}$$

On dit que T est un homomorphisme[16] de groupe, car il envoie un groupe $G = \{g_i\}$ sur un autre groupe $T(G) = \{T(g_i)\}$, en préservant la structure de groupe (attention, on emploie en général le même symbole "." pour la loi de composition de G et de $T(G)$ alors que ces lois n'ont en général rien à voir). On dit alors que les $\{T(g_i)\}$ *forment une représentation de G* et que les quantités qui se transforment par les $\{T(g_i)\}$ (champ, charge, température, spin par exemple) *engendrent la représentation $\{T(g_i)\}$ de G.*

Si l'on s'arrêtait là, tout cela serait tellement général que l'on ne pourrait pas en déduire grand chose. Heureusement, parmi toutes les représentations d'un groupe, il en est qui sont plus agréables que d'autres : ce sont les représentations *linéaires*, i.e. celles qui agissent linéairement sur les quantités physiques qu'elles transforment (voir l'Appendice I). Deux cas peuvent alors se présenter :

1) soit la quantité physique A que l'on étudie possède un nombre fini de composantes, $A = (A_1, \ldots A_n)$ (exemple : le champ électrique qui a trois composantes) et alors les $T(g)$ sont des *matrices*[17] : $A'_i = \sum_j [T(g)]_{ij} A_j$ (exemple : les matrices de rotation 3×3 agissant sur les vecteurs),

15. T exporte donc la structure de groupe des $\{g_i\}$ sur les $\{T(g_i)\}$.
16. Isomorphisme si T est bijectif.
17. En fait, les $T(g)$ sont des opérateurs linéaires agissant dans (l'espace vectoriel) $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), appelés pour l'occasion *espace de représentation*. A ces opérateurs sont associées des matrices les représentant, une fois fait choix d'une base dans cet espace de représentation.

2) soit A a une infinité de "composantes" (ex : un champ $A(x)$) et alors les $T(g)$ sont des opérateurs linéaires. Par exemple, dans une translation à une dimension :

$$A'(x) = A(x+a) = e^{a\frac{d}{dx}} A(x) = T(a)A(x)$$

qui est une forme un peu inhabituelle (mais ô combien importante) de la formule de Taylor.

On reverra tout cela en grand détail par la suite[18].

Il n'est peut être pas inutile de noter que la notion de représentation n'est pas propre à la théorie des groupes mais est au contraire très générale. La géométrie analytique, par exemple, relève de la même démarche puisqu'elle consiste à "envoyer" un problème de géométrie sur un problème isomorphe d'analyse dans $\mathbb{R}^n$. Pour cela, on "ramène l'espace à un repère et on attribue à chaque point des coordonnées", ce qui permet de traduire, i.e. de représenter, le problème initial en un problème d'analyse[19]. La solution, une fois obtenue par des méthodes analytiques, peut être retraduite, en sens inverse, en termes géométriques. L'avantage est bien entendu que l'on dispose dans $\mathbb{R}^n$ d'un arsenal de techniques bien maîtrisées et surtout intuitivement claires. Comme on procède de la même façon en physique, en représentant par des nombres les quantités physiques pertinentes, il est naturel aussi de représenter par des nombres — des matrices — les opérations de symétrie sur ces quantités.

Tout notre travail à venir va consister à chercher les représentations linéaires des groupes de symétrie de la nature, rotations, translations et transformations de Lorentz, *en vue d'en déduire, dans un deuxième temps et par des méthodes lagrangiennes, toutes les équations invariantes sous ces groupes* (en tous cas les plus simples). Ces équations dites de Dirac, Klein-Gordon, Maxwell, Einstein, seront directement intéressantes.

Pour l'instant, attaquons nous à un exemple "simple".

18. Voir l'appendice I pour plus de détails sur la notion de représentation linéaire et non linéaire.

19. Nous sommes aujourd'hui tellement habitués à l'isomorphisme entre notre espace physique et $\mathbb{R}^3$ que l'on en oublie combien cette idée d'associer à chaque point de l'espace des coordonnées et de transformer un problème de géométrie en un problème de calculs sur $\mathbb{R}^3$ a été une percée non triviale. Il n'est peut être pas mauvais pour cela de voir combien nous avons de mal encore à représenter les grandeurs du monde quantique par des opérateurs, les nombres qui nous sont si proches n'intervenant plus qu'en une deuxième étape lors de la prise de valeurs moyennes...

III LE GROUPE DE SYMÉTRIE C_{3V} DU TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

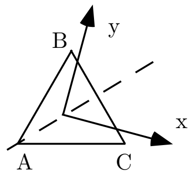

FIG. 1.2 - *Le choix d'axes Oxy correspond au choix de matrice $T(S_A)$ donné en (III_3)*

Le groupe de symétrie du triangle équilatéral possède six éléments :

1) l'identité,

2) les rotations R_1 et R_2 d'angle $2\pi/3$ et $4\pi/3$,

3) les trois symétries S_A, S_B et S_C par rapport aux trois hauteurs passant respectivement par A, B et C.

$\rightarrow$	I	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
I	I	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
R_1	R_1	R_2	I	S_B	S_C	S_A
R_2	R_2	I	R_1	S_C	S_A	S_B
S_A	S_A	S_C	S_B	I	R_2	R_1
S_B	S_B	S_A	S_C	R_1	I	R_2
S_C	S_C	S_B	S_A	R_2	R_1	I

La table de multiplication du groupe est donnée dans la table précédente (la vérifier et vérifier qu'il s'agit d'un groupe).

On peut prouver qu'il n'y a que trois représentations, dites irréductibles, (voir la suite pour une définition) :

1) tous les éléments du groupe sont représentés par 1.

2) les rotations et l'identité sont représentées par 1 et les symétries par -1.

3) une représentation matricielle donnée par :

$$T(I) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad T(R_1) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad ; \quad T(R_2) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$T(S_A) = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \quad ; \quad T(S_B) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad ; \quad T(S_C) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \qquad \text{(III\_3)}$$

Il y a donc deux représentations de dimension 1 et une de dimension 2. Il est très instructif de vérifier que la table de multiplication du groupe est reproduite par chacune des représentations.

I. Notion de réductibilité et d'irréductibilité

Une représentation $\{T(g)\}$ d'un groupe G est formée d'opérateurs linéaires agissant dans un espace vectoriel L, dit espace de représentation (voir la note en page14). Elle est dite *réductible* s'il existe au moins un sous espace L_1 de L, non trivial et laissé invariant par *tous* les $T(g)$. Si aucun sous espace non trivial n'est invariant, on dit que les $T(g)$ forment une représentation *irréductible.* Si $\{T(g)\}$ est réductible, alors, par un choix de base approprié dans L, on peut réécrire tous les $T(g)$ sous la forme de blocs :

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & Q(g) \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix} \tag{III-4}$$

Si de plus le sous espace $L_1^{\perp}$, orthogonal à L_1, est lui aussi laissé invariant par tous les $T(g)$ alors par un choix de base approprié on peut toujours prendre $Q(g) = 0$ pour tout g, si bien que $T(g)$ est diagonal par blocs pour tout g et se réécrit :

$$T(g) = T_1(g) \oplus T_2(g) \qquad\qquad \forall g$$

Si $\{T_1(g)\}$ et $\{T_2(g)\}$ sont elles mêmes réductibles, i.e. si l'on peut itérer le processus avec $\{T_1(g)\}$ et/ou $\{T_2(g)\}$ et que l'on aboutisse à la fin à une forme de $\{T(g)\}$ entièrement diagonalisée par blocs, nous dirons que $\{T(g)\}$ est *complètement réductible* et que nous l'avons décomposé en représentations irréductibles. On peut montrer facilement que quand $\{T(g)\}$ est de dimension finie et unitaire alors $L_1^{\perp}$ est toujours invariant si L_1 l'est, si bien que toute représentation unitaire est toujours complètement réductible. Il s'ensuit l'importante conséquence suivante (d'autant plus importante que pour les représentations de dimension finie, on peut se contenter d'étudier les représentations unitaires, voir encadré III, page(34)):

Pour les représentations unitaires finies, on pourra toujours se contenter d'étudier les représentations irréductibles.

On voit sur cet exemple un phénomène qui est général : envoyer chaque élément du groupe sur le nombre 1 donne une représentation, appelée représentation triviale. Pour triviale qu'elle soit, cette représentation est essentielle. C'est elle qui "transforme" les quantités qui sont invariantes (on dit aussi scalaires) sous le groupe.

On peut remarquer aussi que le déterminant des matrices de la troisième représentation est la deuxième représentation (pourquoi en est il forcément ainsi?). La troisième représentation agit bien entendu sur des objets à deux composantes et que l'on nommera vecteurs à deux composantes (du plan Oxy évidemment).
Ici, plusieurs remarques de portée générale :

• Il y a une infinité de choix possibles pour la matrice représentant S_A par exemple. En fait, pour comprendre cet arbitraire dans le choix de représentation matricielle, il faut réaliser qu'à un élément g de G, on associe par l'homomorphisme T un opérateur linéaire $T(g)$ (un endomorphisme d'espace vectoriel pour être politically correct (voir la note en page14)[20]) qui est lui même représenté par une matrice une fois fait choix d'une base dans l'espace vectoriel de représentation (ici, comme il s'agit de la représentation vectorielle, l'espace de représentation est (isomorphe à) l'espace de base, si bien que la base dans cet espace peut servir aussi de base de l'espace vectoriel de représentation). Ainsi, sans changer l'opérateur $T(g)$, on peut changer de matrice associée à $T(g)$ en changeant de base (les autres matrices représentant les autres éléments du groupe doivent changer de même dans ce cas). Le choix de matrice fait pour représenter S_A correspond au choix d'axes dessinés sur la figure puisque, dans ces axes, S_A échange x et y (le vérifier impérativement ainsi que le fait que ce choix détermine toutes les autres matrices).

Exercice: Peut on prendre $S_A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$? Quelles sont les autres matrices de la représentation dans ce cas? A quel choix d'axes d'axes cela correspond il?

Moralité :

1) un changement de choix de matrice représentant S_A par exemple (pourvu qu'elle reste de déterminant -1) est équivalent à un changement d'axes. Une fois fait choix de ces axes, plus aucun arbitraire ne reste : les matrices représentant les autres éléments du groupe sont entièrement fixées.

2) il n'y a donc pas qu'une seule solution pour la représentation matricielle 2×2, mais les différentes solutions sont *équivalentes* dans le sens qu'elles ne diffèrent que par un choix d'axes. Deux représentations matricielles $\{T_1(g)\}$ et $\{T_2(g)\}$ de même dimension sont dites équivalentes si *l'ensemble* de ces matrices se déduisent les unes des autres par un même changement d'axes, i.e. s'il existe une matrice unitaire U réalisant le changement de base[21], telle que pour tout $g \in G$:

$$T_2(g) = U\, T_1(g)\, U^{-1} \tag{III.5}$$

20. Attention, il ne faut pas confondre l'espace de base, ici le plan affine, avec l'espace vectoriel de représentation dans lequel agit T. Ces deux espaces n'ont rien à voir et ne sont d'ailleurs pas en général de même dimension. Les espaces de représentation pour les trois représentations de C_{3v} sont respectivement de dimension 1, 1 et 2.

21. Dans notre cas, où l'on travaille dans un espace réel, U serait une matrice unitaire réelle, i.e. une matrice orthogonale : ${}^tU = U^{-1}$, i.e. encore une matrice de rotation.

On vérifiera impérativement, et aisément, que (II_2) est préservée comme il se doit dans cette transformation.

• Il y a trois sortes de quantités qui se transforment linéairement dans une transformation du triangle puisqu'il y a trois représentations inéquivalentes (et irréductibles). Nous les appellerons des scalaires pour la première représentation, des pseudo-scalaires pour la seconde et des vecteurs pour la troisième. Exemple :

$\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{AB}$ sont des vecteurs (le vérifier impérativement),

$\vec{OA}^2$ est un scalaire,

$\vec{OA} \wedge \vec{OB}$ définie comme $(OA)_x(OB)_y - (OA)_y(OB)_x$ est un pseudo-scalaire (le vérifier).

• On peut bien entendu considérer un objet matriciel comme :

$$X = \begin{pmatrix} \vec{OA} \\ \vec{OA}^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(III\_6)}$$

qui a trois composantes et qui se transforme linéairement sous C_{3v}. Mais cet objet est la réunion totalement artificielle, dans un même multiplet, d'un doublet et d'un singulet *qui ne se mélangeront jamais* lors d'une transformation. Les 2+1 composantes de X n'ont donc aucune raison de jouer des rôles similaires, contrairement aux deux composantes d'un vecteur, condamnées à jouer des rôles semblables dans toute théorie invariante sous C_{3v} et qu'il est donc naturel de réunir dans un même multiplet. En d'autres termes, si l'on effectue une quelconque des six opérations g de symétrie sur le triangle, X va se transformer par $D(g)$:

$$X' = D(g)X$$

avec $D(g)$ *diagonal par blocs pour tout* g :

$$D = \begin{pmatrix} T^3(g) & 0 \\ 0 & T^1(g) \end{pmatrix} \qquad \text{(III\_7)}$$

On dit alors que l'ensemble des matrices $D(g)$ forment une représentation **réductible** de C_{3v}. Une représentation dont l'ensemble des matrices ne peuvent pas être *simultanément* diagonalisées par blocs est dite **irréductible** (voir l'encadré I).

Les représentations irréductibles sont les seules qui vont nous intéresser. Ce sont les briques élémentaires de toute construction. On peut prouver assez simplement que les trois représentations données précédemment pour C_{3v} sont les seules représentations irréductibles (à une équivalence près) de ce groupe, voir l'Appendice II.

On voit, sur l'exemple de C_{3v}, se dérouler le programme que l'on s'était fixé : trouver les représentations irréductibles, c'est à la fois identifier les quantités mathématiques qui se transforment linéairement sous le groupe *et* les matrices qui transforment ces quantités. Pour un

Exercice: La molécule NH_3 est une pyramide dont la base triangulaire est formée par les trois atomes d'hydrogène. Elle possède donc la symétrie C_{3v}. Appelons s_a, s_b, s_c les orbitales $1s$ des atomes d'hydrogène et s_n l'orbitale $2s$ de l'atome d'azote. Trouver la représentation de C_{3v} de dimension quatre transformant ces orbitales. Montrer qu'elle est trivialement réductible en la somme d'une représentation de dimension 1 et d'une représentation de dimension 3. Trouver les combinaisons linéaires de s_a, s_b et s_c qui permettent de réduire la représentation de dimension 3 précédente. (Réponse: $s_1 = s_a + s_b + s_c$, $s_2 = 2s_a - s_b - s_c$, $s_3 = s_b - s_c$.)

groupe fini, le nombre de représentations irréductibles est fini (pour plus d'informations, voir l'Appendice II). Par contre, pour un groupe continu comme le groupe des rotations, ce nombre est infini dénombrable. Nous allons maintenant construire ces représentations.

CHAPITRE 2

Groupes de Lie – groupes SO(3) et SU(2)

Le passage des groupes discrets comme C_{3V} aux groupes continus (infinité continue d'éléments) comme le groupe des rotations s'accompagne de pas mal de bouleversements quant aux représentations de ces groupes et on ne peut pas directement transposer en général aux groupes continus ce qui est valable pour les groupes discrets. Deux grandes catégories de groupe se distinguent de ce point de vue, les compacts, pour lesquels le(s) paramètre(s) du groupe varie(nt) sur un compact (exemple: les rotations où l'angle varie entre 0 et 2π) et les non compacts pour lesquels il n'en est pas ainsi (exemple: les translations où les paramètres varient sur tout $\mathbb{R}^D$, les transformations de Lorentz où la rapidité varie sur $\mathbb{R}^3$). Pour tous ces groupes, la notion de représentations irréductibles garde son sens mais leur nombre — toujours infini —, leur unitarité et leur dimension sont non trivials. Les groupes compacts sont ceux qui sont le plus proches des groupes discrets: presque tout se transpose, le nombre infini — discret — de représentations irréductibles unitaires étant la différence majeure. Nous allons voir maintenant en détail ce qu'il en est pour le groupe des rotations.

I LE GROUPE DES ROTATIONS ET SES REPRÉSENTATIONS - GROUPES SO(3) ET SU(2)

L'hypothèse de l'isotropie de l'espace signifie pour nous l'invariance des lois physiques sous le groupe des rotations[1]. Comme il l'a déjà été spécifié auparavant, nous ne connaissons du groupe des rotations que ses manifestations sur les grandeurs – les quantités mathématiques – que nous utilisons en physique. Etudions dans un premier temps la transformation des vecteurs par les rotations. Et d'abord, une remarque. Pour étudier les rotations, on a le choix entre un point de vue “actif” où un seul observateur observe deux systèmes identiques déduits l'un de l'autre par rotation (on tourne le système en gardant fixes les axes de référence), et un point de vue “passif” où un même système est observé par deux observateurs différents tournés l'un par rapport à l'autre (on garde fixe le système et on tourne les axes de référence). C'est, sauf mention explicite du contraire, ce dernier point de vue que nous adopterons dans la suite[2].

1. L'espace est supposé euclidien et à trois dimensions.

2. Notons en passant que pour qu'une théorie physique soit complète, il est nécessaire de savoir comment cette théorie, écrite par un observateur, se transforme en celle écrite par un autre observateur (point de vue passif).

A Les vecteurs - algèbre de Lie du groupe des rotations

Effectuons, par exemple, une rotation des axes d'angle θ autour de Oz. Appelons $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ les “vecteurs” de base des deux systèmes d'axes.

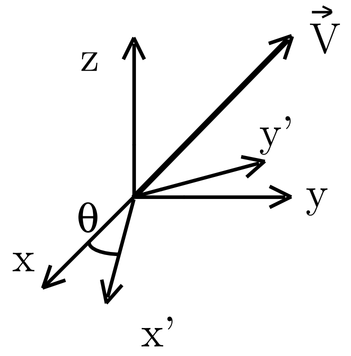

FIG. 2.1 - *Rotation (passive) du système d'axes*

Par définition, dans le point de vue passif, les vecteurs ne changent pas, seules leurs composantes le font. Ce changement de *composantes* est donné par[3] :

$$\sum_{i=1}^{3} V_i \vec{e}_i = \vec{V} = \sum_{j=1}^{3} V_j' \vec{e}_j{}' \tag{I.1}$$

avec (attention aux signes)

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1{}' \\ \vec{e}_2{}' \\ \vec{e}_3{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \tag{I.2}$$

Par définition de la matrice R, on a donc :

$$\vec{e}_j{}' = \sum_{k=1}^{3} R_{jk}\, \vec{e}_k \tag{I.3}$$

où, par conséquent, j est un indice de ligne et k un indice de colonne. On en déduit :

$$V_i = \sum_{j=1}^{3} V_j'\, R_{ji} = \sum_{j=1}^{3} ({}^tR)_{ij}\, V_j' = \sum_{j=1}^{3} (R^{-1})_{ij}\, V_j' \tag{I.4}$$

car R est une matrice orthogonale (i.e. de rotation) et donc $R^{-1} = {}^tR$. On en déduit donc :

$$V_j' = \sum_{k=1}^{3} R_{jk}\, V_k \tag{I.5}$$

3. Notons que dans le point de vue passif il est dangereux de poser $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ car on travaille avec deux bases différentes.

Les composantes se transforment donc comme les "vecteurs" de base dans une transformation passive[4].

Il va être intéressant dans la suite de considérer les transformations infinitésimales car, d'une part, elles sont très simples et plus commodes à manipuler que les transformations finies et, d'autre part, on va montrer que l'on peut reconstruire les transformations finies à partir de ces transformations infinitésimales, si bien que l'on pourra, pour tout ce qui suivra, se limiter à ces transformations (voir cependant l'encadré II et la page 32). Prenons par exemple une rotation infinitésimale autour de l'axe Oz :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta & \\ -\delta\theta & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \tag{I-6}$$

et calculons $\delta V_i = V_i' - V_i$, on trouve :

$$\begin{pmatrix} \delta V_1 \\ \delta V_2 \\ \delta V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \delta\theta & \\ -\delta\theta & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \tag{I-7}$$

Appelons

$$J_z = J_3 = \begin{pmatrix} . & -i & . \\ i & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \tag{I-8}$$

alors[5]

$$\delta V_i = i\delta\theta \sum_{j=1}^{3} (J_z)_{ij} V_j \tag{I-9}$$

On peut définir de même[6] :

$$J_x = J_1 = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & -i \\ . & i & . \end{pmatrix} \quad ; \quad J_y = J_2 = \begin{pmatrix} . & . & i \\ . & . & . \\ -i & . & . \end{pmatrix} \tag{I-10}$$

4. C'était évident a priori car

$$V_i' = \vec{V}.\vec{e}_i\,' = \sum_j \vec{V}.(R_{ij}\vec{e}_j) = \sum_j R_{ij}\vec{V}.\vec{e}_j = \sum_j R_{ij}V_j$$

Pour une transformation active, les composantes se transforment par la matrice R^{-1}; le montrer. On voit sur cet exemple que les $\vec{e}_j$ ne sont pas des vecteurs (pour le groupe des rotations) ! En effet, pour nous un vecteur, pour le groupe des rotations, est, par définition, un objet à trois composantes qui est invariant dans un changement d'axes, alors que bien entendu les axes, c'est à dire les $\vec{e}_j$ justement, se transforment. Ceci est particulièrement important pour la théorie de la gravitation et conduit à pas mal de confusions quand on n'y prend pas garde.

5. On déduit de (I-9) et de (I-11) que $\delta V_i = \sum_{jk} \delta\theta_k \epsilon_{kij} V_j = -\sum_{jk} \epsilon_{ikj} \delta\theta_k V_j = -(\vec{\delta\theta} \wedge \vec{V})_i$.

6. Cette définition se généralise à un groupe continu quelconque : les générateurs G_i sont les dérivées des matrices M de transformation par rapport aux paramètres α_i, prises à paramètres nuls : $G_i = i\, dM/d\alpha_i|_{\alpha=0}$.

et on aurait les mêmes relations pour les rotations infinitésimales autour de Ox et Oy. Remarquons que

$$(J_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk} \tag{I.11}$$

avec ϵ le tenseur totalement antisymétrique, i.e. antisymétrique dans l'échange de n'importe quelle paire d'indices et tel que $\epsilon_{123} = +1$. Il n'est pas très compliqué de retrouver l'effet d'une rotation finie autour Oz à partir de l'expression de la rotation infinitésimale car la rotation d'angle θ est la succession des N rotations d'angle θ/N considérées comme infinitésimales si $N \to \infty$.

$$V_i' = \sum_{j=1}^{3} \left(1 + i\frac{\theta}{N} J_z\right)^N_{ij} V_j \tag{I.12}$$

Or

$$\lim_{N\to\infty} \left(1 + i\frac{\theta}{N} J_z\right)^N = e^{i\theta J_z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} (J_z)^k \tag{I.13}$$

soit

$$R(\theta, \hat{z}) = e^{i\theta J_z} \tag{I.14}$$

On peut d'ailleurs le vérifier directement :

$$\begin{aligned}
e^{i\theta J_z} &= 1 + i\theta J_z + \frac{(i\theta)^2}{2} {J_z}^2 + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \theta & \\ -\theta & & \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\theta^2/2 & & \\ & -\theta^2/2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \dots \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \\ -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{I.15}$$

Les relations précédentes se généralisent pour une rotation autour d'un axe quelconque (ça n'est pas tout à fait trivial) [7] :

$$\boxed{R(\theta, \vec{n}) = e^{i\vec{\theta}.\vec{J}} = e^{i(\theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z)}} \tag{I.16}$$

7. Il n'est pas inutile de noter que ceci *ne* signifie *pas* qu'une rotation de paramètre $\vec{\theta}$ est la composée des trois rotations autour de Ox, Oy et Oz d'angles θ_x, θ_y et θ_z respectivement car ces trois rotations ne commutent pas entre elles, voir la formule (I.19).

où $\vec{\theta} = \theta\vec{n}$ avec $\vec{n}$ = vecteur unitaire suivant l'axe de la rotation et θ = angle de la rotation[8]. Attention, $\vec{J}$ est un "vecteur" dont chaque composante J_i est une matrice.

On a maintenant un résultat qui s'avérera très important pour la suite : l'ensemble des J_i est clos sous l'action du commutateur (le vérifier en se servant par exemple de I_11)) :

$$[J_i, J_j] = i \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} J_k \tag{I\_17}$$

par exemple : $[J_x, J_y] = iJ_z$. Remarquons que ce ne sont pas des relations linéaires. L'ensemble des trois J_i munis de ces relations de commutation forme *l'algèbre de Lie* du groupe des rotations. On appelle *constantes de structure* du groupe $SO(3)$ les $i\epsilon_{ijk}$.

> **Exercice** : Il est très commode, pour certains calculs, d'écrire J_i sous la forme $J_i = -i\sum_{j,k}\epsilon_{ijk}|j\rangle\langle k|$ avec $|i\rangle = \vec{e}_i$. Vérifier cette relation et retrouver, grâce à elle, le commutateur de deux J quelconques.

En résumé, on a vu que l'on peut construire n'importe quelle rotation à partir des trois J_i seulement et que ces trois J_i vérifient une algèbre très simple de commutation.

Mais il y a beaucoup plus fort... Comme l'ensemble des rotations forme un groupe et qu'une rotation quelconque des composantes d'un vecteur peut s'écrire $\exp(i\vec{\theta}.\vec{J})$, il doit exister, pour chaque $\vec{\theta}$ et $\vec{\theta}'$, un $\vec{\theta}''$ tel que :

$$e^{i\vec{\theta}.\vec{J}}.\,e^{i\vec{\theta}'.\vec{J}} = e^{i\vec{\theta}''.\vec{J}} \tag{I\_18}$$

Le calcul de $\vec{\theta}''$ en fonction de $\vec{\theta}$ et $\vec{\theta}'$ est non trivial et a conduit Hamilton à inventer les quaternions. On ne va pas effectuer ce calcul mais simplement se convaincre de (I_18). La formule suivante dite de Campbell - Hausdorff (et pas mal d'autres) :

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\ldots} \tag{I\_19}$$

où tous les termes suivants, difficiles à calculer, s'expriment uniquement en fonction des commutateurs emboîtés de A et B,

$$[A,[A,B]]\ ,\ [B,[A,B]]\ ,\ [A,[A,[A,B]]]\ ,\ \ldots\ ,$$

8. Remarquons qu'avec le i inclus dans la définition des J_k, R est donnée par une exponentielle complexe. Ce choix de convention est fait pour que les J_i soient des matrices hermitiennes et imaginaires pures : $J_i = {}^t\bar{J}_i$ et donc antisymétriques. R qui est une matrice orthogonale, i.e. vérifiant ${}^tR = R^{-1}$ (R est de déterminant 1 et réelle) apparaît clairement comme telle car ${}^tR = e^{i\vec{\theta}.{}^t\vec{J}} = R^{-1}$. Sous cette forme R ressemble à une phase (ne change pas le module des vecteurs).

et le fait que les J_i forment un ensemble clos sous l'action du commutateur,

$$[J_{i_1}, [J_{i_2}, [\dots, J_{i_n}]] \dots] \propto J_j$$

nous montrent que l'équation (I_18) est bien vérifiée et donc que $\vec{\theta}\,''$ existe effectivement. Mais on en déduit aussi que $\vec{\theta}\,'' = \vec{\theta}\,''(\vec{\theta}, \vec{\theta}\,')$ est une fonction entièrement déterminée par les relations de commutation des J_i entre eux et donc que... [9]

Toute l'information sur la table de multiplication du groupe des rotations est codée dans l'algèbre de Lie du groupe.

On en déduit une conséquence très importante pour la suite. Supposons que nous cherchions les représentations en termes de matrices $N \times N$ du groupe des rotations. Supposons également que nous ayons trouvé 3 matrices $\mathcal{J}_i$, hermitiennes, $N \times N$, vérifiant la même algèbre que les J_i :

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \mathcal{J}_k \tag{I\_20}$$

alors l'ensemble des matrices

$$D(\vec{\theta}) = e^{i\vec{\theta}.\vec{\mathcal{J}}} \tag{I\_21}$$

vérifient obligatoirement la même table de multiplication que les $R(\vec{\theta})$ et forme donc une représentation unitaire de ce groupe[10]. On en conclut donc l'énorme simplification suivante :

Pour avoir une représentation du groupe des rotations en termes de matrices $N \times N$, il faut et il suffit d'obtenir une représentation de l'algèbre de Lie du groupe, i.e. d'avoir 3 matrices $N \times N$ qui vérifient les mêmes relations de commutation que celles existant entre les J_i et qui soient hermitiennes.

Forts de ce théorème, nous allons chercher ces représentations. Mais avant, un peu de vocabulaire.

1) Le groupe des matrices $R(\vec{\theta})$ est appelé $SO(3)$.
  S = spécial $\Longleftrightarrow \det R = +1$,
  O = orthogonal réel $\Longleftrightarrow R$ est une matrice de coefficients réels vérifiant ${}^tR = R^{-1}$,
  $3 = R$ est une matrice $3{\times}3$.

9. Ce qui suit est vrai car le groupe des rotations est connexe (quoique non simplement connexe). Ce résultat se généralise à tous les groupes de Lie (connexes).
10. On verra page 32 une petite subtilité à ce propos sur l'exemple de $SU(2)$ et de $SO(3)$.

2) J_1, J_2, J_3 sont appelés les *générateurs* infinitésimaux du groupe.

3) Les relations de commutation entre les générateurs forment l'algèbre de Lie du groupe.

4) $\vec{J}^{\,2} = \sum_i J_i^2$ commute avec tous les générateurs J_j. On l'appelle l'opérateur de Casimir du groupe. On peut montrer que c'est le seul (à un facteur près) opérateur construit avec les J_i qui a cette propriété. On peut en déduire grâce à un théorème, appelé le lemme de Schur, qu'il est par conséquent proportionnel à l'unité dans chaque représentation (mais le facteur de proportionnalité peut dépendre – et en fait dépend – de la représentation). On peut aussi montrer que toutes ses valeurs propres sont de la forme $j(j+1)$ avec j entier. Une représentation est donc étiquetée par une valeur de j.

4) Dans un espace de dimension trois, les objets qui se transforment lors d'une rotation par les matrices de $SO(3)$ sont appelés des *vecteurs* (dans un espace de dimension D le groupe devient $SO(D)$ et un vecteur a D composantes). $SO(3)$ est donc la représentation vectorielle du groupe des rotations d'un espace à trois dimensions[11].

Un vecteur pour un physicien est donc bien plus qu'un élément d'un espace vectoriel (ce qui est banal et seulement indicatif d'une structure linéaire), c'est un objet qui engendre la représentation $SO(3)$ du groupe des rotations (ce qui n'est pas trivial).

En fait, tout cela est connu intuitivement par tout le monde : il ne viendrait à l'idée de personne de mettre une flèche sur un nombre réel ou sur une fonction de carré sommable. Ce sont pourtant des éléments d'un espace vectoriel (à noter qu'en mécanique quantique, on a une autre notation pour les éléments de l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable : les kets).

Commençons notre recherche des représentations de $SO(3)$ par la ou les représentations de dimension 1. On cherche donc des $\mathcal{J}_i$ qui soient des nombres réels et qui vérifient l'algèbre

11. Le groupe des rotations est souvent introduit et défini par son action sur les vecteurs position de l'espace euclidien à trois dimensions. Ceci me paraît pédagogiquement dangereux *en physique*. En effet, en physique, les positions ne jouent pas forcément un rôle privilégié : les impulsions peuvent être plus fondamentales, ou les kets d'un espace de Hilbert ou la quadri-position de l'espace de Minkowski ou le tenseur électromagnétique. . . Les vecteurs (position) ne sont qu'un cas particulier parmi d'autres de représentation. Le groupe de matrices $SO(3)$ est important non pas tant parce qu'il transforme les positions lors d'une rotation que parce qu'il est le groupe de symétrie correspondant à l'isotropie de l'espace euclidien. Ainsi, le groupe $SO(3)$ garde toute son importance même pour un problème pour lequel la notion de position n'a aucune pertinence — un champ, un électron délocalisé — car il exprime une *propriété de l'espace* et non du système étudié. Nous verrons de plus, lors de l'étude des spineurs, que nous sommes intéressés en physique par des quantités qui, à proprement parler, n'engendrent pas une représentation de $SO(3)$ et qui pourtant se transforment linéairement par (engendrent une représentation de) un groupe cousin de $SO(3)$ ($SU(2)$) lors des rotations dans l'espace physique.

de Lie, Eq.(I-20). Comme deux nombres réels commutent toujours, on obtient comme seule solution $\mathcal{J}_i = 0$, soit, pour les "matrices" de la représentation : $D(\theta) = \exp(i\vec{\theta}.\vec{0}) = 1$. Donc la seule représentation de dimension 1 est la représentation triviale 1. C'est la représentation engendrée par les quantités dites scalaires qui sont invariantes sous les rotations. On vérifiera que c'est par exemple le cas pour le produit scalaire de deux vecteurs.
Continuons par...

B Représentation de dimension deux du groupe des rotations, groupe SU(2), spineurs

On a trouvé une représentation de dimension 1 et une de dimension trois du groupe des rotations et il n'est pas trivial a priori de savoir s'il en existe de dimension 2. La recette est toujours la même : chercher trois matrices, 2×2 dans ce cas-ci, qui vérifient l'algèbre de Lie du groupe, Eq.(I-20). Pour respecter les conventions usuelles de notation, nous appelons dans ce cas les générateurs $\sigma_x/2, \sigma_y/2, \sigma_z/2$. Il est facile d'en trouver : ce sont (une demi fois) les matrices de Pauli que nous notons $\sigma_1/2, \sigma_2/2, \sigma_3/2$:

$$\frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma_1}{2} = 1/2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\sigma_y}{2} = \frac{\sigma_2}{2} = 1/2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\sigma_z}{2} = \frac{\sigma_3}{2} = 1/2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{I-22}$$

On a en effet [12]

$$\left[\frac{\sigma_x}{2}, \frac{\sigma_y}{2}\right] = i\,\frac{\sigma_z}{2} \qquad \text{(le 1/2 est important)} \tag{I-23}$$

et permutations circulaires.
Les matrices de la représentation sont les $\left\{e^{i\vec{\theta}.\vec{\sigma}/2}\right\}$. Or (le montrer) :

$$e^{i\vec{\theta}.\vec{\sigma}/2} = \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{1} + i\sin\frac{\theta}{2}\;\vec{n}.\vec{\sigma} \tag{I-24}$$

soit

$$U(\vec{\theta}) = e^{i\vec{\theta}.\vec{\sigma}/2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} + in_z\sin\frac{\theta}{2} & (in_x + n_y)\sin\frac{\theta}{2} \\ (in_x - n_y)\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} - in_z\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{I-25}$$

Cette matrice est en fait une matrice *générale* à coefficients complexes de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \det U = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1 \tag{I-26}$$

12. Une relation très commode sur les σ_i :

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbf{1} + i\sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k$$

L'ensemble de ces matrices est le groupe $SU(2)$:

S : spécial $\Longleftrightarrow$ $\det U = +1$,

U : unitaire $\Longleftrightarrow$ $U^\dagger = U^{-1}$ $\quad (U^\dagger = {}^t\bar{U})$,

2 : matrice 2×2.

On appelle spineurs les objets à deux composantes qui engendrent la représentation $SU(2)$ du groupe des rotations, i.e. qui se transforment lors d'une rotation par (voir l'Appendice III) :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow z' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = U(\vec{\theta}) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{I\_27}$$

Il est important de comprendre que l'aspect spinoriel (ou vectoriel ou tensoriel) d'un doublet (respectivement d'un triplet ou d'un n-uplet) ne se manifeste que lorsqu'on effectue une rotation. Par exemple, n'importe quel triplet de nombres peut représenter les composantes d'un vecteur dans une base donnée : pour savoir s'il s'agit bien d'un vecteur, il faut le transformer dans une rotation. Il en va de même bien entendu pour un spineur qui peut être n'importe quel doublet de nombres complexes. Notons un fait remarquable : alors que les matrices de $SO(3)$ sont réelles, celles de $SU(2)$ sont en général à coefficients complexes. Ceci implique que si un observateur associe à une grandeur physique spinorielle un doublet (z_1, z_2) de nombres réels, un autre observateur tourné par rapport au premier, associera en général à la même grandeur un doublet (z'_1, z'_2) complexes. En d'autres termes, contrairement aux vecteurs, la condition de réalité des composantes d'un spineur n'est pas stable par rotation.

Et maintenant une question méta - physique. Pourquoi la physique classique n'emploie-t'elle pas de spineurs et pourquoi la mécanique quantique le fait elle? Sans prétendre que cela réponde entièrement à la question, on consultera à ce propos avec profit l'encadré IV, page 53.

Notre construction précédente nous assure par avance que les tables de multiplication de $SU(2)$ et $SO(3)$ sont identiques. Etablissons explicitement l'homomorphisme envoyant $SU(2)$ sur $SO(3)$.

C Construction de la relation SO(3) - SU(2)

Commençons par quelques remarques préliminaires :

• l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices M, 2×2, hermitiques ($M^\dagger = M$) et de trace nulle est isomorphe à $\mathbb{R}^3$. En effet, la paramétrisation générale d'une telle matrice est :

$$M = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \tag{I\_28}$$

avec x, y, z réels.

• une base de l'espace à quatre dimensions des matrices 2×2 est $\sigma_\mu = (\mathbb{1}_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ avec $\mu = 0, 1, 2, 3$. Dans cette base M s'écrit :

$$M = M(\vec{x}) = \vec{x}.\vec{\sigma} = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 \tag{I.29}$$

Le produit scalaire dans cet espace est 1/2 fois la trace et les σ_μ sont orthonormées pour ce produit scalaire (le vérifier) :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = \delta_{\mu\nu} \tag{I.30}$$

On en déduit évidemment que si $N = \sum_\mu N_\mu \sigma_\mu$ alors $N_\mu = 1/2\ \mathrm{Tr}(N\sigma_\mu)$.

• le déterminant de M est l'opposé du carré scalaire de $\vec{x}$: $\det M = -(x^2 + y^2 + z^2)$.

Forts de ces préliminaires, nous pouvons nous attaquer à notre problème. L'idée est d'associer à une transformation $U \in SU(2)$ agissant sur les matrices $M(\vec{x})$ la transformation $R_U \in SO(3)$ ainsi induite sur les vecteurs $\vec{x}$ associés aux matrices $M(\vec{x})$, Eq.(I.29). Si l'application $U \to R_U$ est un homomorphisme, nous aurons alors établi que $SO(3)$ est une représentation de $SU(2)$.

Il n'y a pas une foule de choix possibles pour transformer par $SU(2)$ une matrice hermitique de trace nulle en une autre matrice hermitique de trace nulle. Appelons R_U l'application de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ qui est telle que :

$$M \to M' = R_U(M) = UMU^{-1} \quad \text{avec } U \in SU(2) \tag{I.31}$$

On peut vérifier que M' est 1) hermitique : $M'^\dagger = (UMU^\dagger)^\dagger = M'$ et 2) de trace nulle : $\mathrm{Tr}M' = \mathrm{Tr}(UMU^{-1}) = \mathrm{Tr}M = 0$ par cyclicité de la trace.

On en déduit que $M' \in \mathcal{M}$ et que par conséquent elle s'écrit : $M' = \vec{x}\,'.\vec{\sigma}$. Comme $\mathcal{M}$ et $\mathbb{R}^3$ sont isomorphes, on peut continuer à appeler R_U la transformation qui envoie $\vec{x}$ sur $\vec{x}\,'$:

$$\vec{x}\,' = R_U(\vec{x}).$$

Or il est trivial que $\det M' = -\vec{x}\,'^2$ puisque $M' \in \mathcal{M}$, et que R_U conserve le déterminant :

$$\det M' = \det(UMU^{-1}) = \det M.$$

Donc $\vec{x}\,'^2 = \vec{x}\,^2$ et par conséquent R_U est une rotation : $R_U \in SO(3)$[13]. On a de plus :

$$R_U.R_V(M) = U(VMV^{-1})U^{-1} = (U.V)M(U.V)^{-1} = R_{U.V}(M) \tag{I.32}$$

et donc l'application qui envoie $U \in SU(2)$ sur $R_U \in SO(3)$ est un homomorphisme. On a ainsi montré directement que $SO(3)$ est une représentation de $SU(2)$.

13. En toute rigueur, il faudrait encore montrer que son déterminant est positif, sinon il pourrait s'agir d'une réflexion. On peut soit le faire par calcul direct soit se contenter de l'argument suivant qui contient l'essentiel : on peut passer continûment de la matrice $\mathbb{1}_2$ à $U = \exp(i\vec{\theta}.\vec{\sigma}/2)$ en faisant varier continûment $\vec{\theta}$. Ce faisant, on passe continûment de $R_U(\mathbb{1}_2) = \mathbb{1}_3$ à $R_U(\vec{\theta}) = R_U$. Or $\det \mathbb{1}_3 = 1$ et par conséquent $\det R_U = +1$ aussi.

II. Topologie — Groupe de recouvrement

La notion de continuité d'une représentation est fondamentale. L'idée en est simple. Pour le groupe des rotations par exemple (et il en ira de même de façon "générale" pour les groupes ayant une infinité continue d'éléments), on voit que *l'espace des paramètres* $\vec{\theta}$ est un domaine de $\mathbb{R}^3$ sur lequel on peut définir une notion de continuité (contrairement aux groupes discrets). On souhaite évidemment qu'à deux rotations de paramètres $\vec{\theta}$ et $\vec{\theta}\,'$ proches correspondent des éléments du groupe $g(\vec{\theta})$ et $g(\vec{\theta}\,')$ ainsi que des représentants $T(g(\vec{\theta}))$ et $T(g(\vec{\theta}\,'))$ qui soient proches. La structure qui permet de définir la notion de continuité de façon générale est celle de topologie. Nous n'entrerons pas dans les détails car il suffit de savoir que pour les groupes qui nous intéresseront, on peut induire une topologie sur le groupe à partir de celle de l'espace des paramètres qui, étant un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, nous est assez familière (boules ouvertes de $\mathbb{R}^n$).
Prenons comme exemple l'espace des paramètres de $SO(3)$. L'idée est qu'à chaque vecteur $\vec{\theta}$, on peut associer un point d'une boule qui est l'extrémité de ce vecteur (tous les vecteurs partant du centre de la boule). Etant donné que $R(\theta+\pi,\vec{n}) = R(\pi-\theta,-\vec{n})$, le rayon de cette boule est π, toute rotation d'angle supérieur à π étant égale à une rotation d'angle inférieur à π autour de la direction opposée. Mais on doit encore faire attention car les points diamétralement opposés sur la *surface* de la boule doivent être identifiés puisqu'ils correspondent à la même rotation : $R(\pi,\vec{n}) = R(\pi,-\vec{n})$. Finalement, l'espace des paramètres de $SO(3)$ est une boule de rayon π dont les points diamétralement opposés sur la surface sont identifiés. Cet espace est connexe mais *non simplement connexe* car un chemin partant d'un point intérieur à la boule arrivant sur la surface et repartant depuis le point diamétralement opposé pour revenir à son point de départ ne peut pas être continûment déformé pour être ramené à un point (c'est ce qui arrive aussi lorsqu'il y a un trou dans une surface et qu'on dessine un chemin fermé entourant le trou). Or l'algèbre de Lie, obtenue par développement limité au voisinage de l'identité (le centre de la boule), n'est sensible qu'à la structure locale du groupe et non à sa structure globale. Une représentation de l'algèbre de Lie d'un groupe G peut donc fournir par exponentiation une représentation (continue) $T(G)$ du groupe G qui s'avère être *multiplement valuée* si G et $T(G)$ n'ont pas la même topologie. C'est la raison pour laquelle, si l'on ne veut pas abandonner la notion de continuité d'une représentation, on est amené à associer, Eq.(I-31), à une même matrice R de $SO(3)$ (doublement connexe), deux matrices U et $-U$ de $SU(2)$ (simplement connexe). Vérifier en effet grâce à (I-25) que le chemin partant du centre de la boule et y revenant en augmentant continûment θ de 0 à 2π a comme image un chemin dans $SU(2)$ partant de $\mathbb{1}$ et arrivant à $-\mathbb{1}$.
On peut montrer de façon générale deux théorèmes :
1) Un groupe n-connecté peut au plus avoir des représentations n-valuées.
2) **Pour tout groupe multiplement connexe G, il existe un unique plus "petit" groupe simplement connexe $\bar{G}$ qui a la même algèbre de Lie** (aucun sous groupe de $\bar{G}$ n'est homomorphe à G). $\bar{G}$ est dit **groupe de recouvrement universel** de G. Pour $G = SO(3)$, $\bar{G} = SU(2)$. Pour $G = SO(3,1)$, $\bar{G} = SL(2,\mathbb{C})$, voir la suite.

Mais attention, la réciproque est fausse car cette représentation n'est pas fidèle (i.e. ça n'est pas un isomorphisme) et donc l'homomorphisme inverse n'existe pas[14]. En effet, aux matrices

14. Notons que si deux groupes sont isomorphes l'un de l'autre, ils sont des représentations (dites fidèles) l'un de l'autre et il est indifférent de chercher les représentations de l'un plutôt que de l'autre : ce sont les mêmes.

U et $-U$ est associée la même matrice R_U : $R_U = R_{-U}$. Dit autrement, l'application "inverse" de $SO(3)$ dans $SU(2)$ est bivaluée et donc $SU(2)$ *n'est pas une représentation de* $SO(3)$.

Peut-on remédier à cela et construire un isomorphisme de $SO(3)$ dans $SU(2)$? Non, si l'on veut conserver la continuité de la représentation ($U \to R_U$) car un tel isomorphisme (appelé homéomorphisme s'il est continu dans les deux sens) est un morphisme de topologie, et ne peut donc exister qu'entre des espaces topologiquement équivalents. Or $SU(2)$ est simplement connexe alors que $SO(3)$ l'est doublement, si bien que ces espaces ne sont pas topologiquement équivalents (voir l'encadré II). Nous verrons dans la suite que ces considérations ne sont pas qu'arguties mathématiques mais ont des implications physiques importantes. Tout vient du fait que $-U(\theta,\vec{n}) = U(\theta+2\pi,\vec{n})$ (voir Eq.(I_24)) et donc, alors qu'une rotation de 2π ne peut pas se distinguer de pas de rotation du tout pour des vecteurs, **il n'en est pas de même pour des spineurs**. Notre intuition, basée sur un "monde classique" où les spineurs n'interviennent pas, nous trompe sur ce point. Pour un spineur, c'est une rotation de 4π qui est équivalente à pas de rotation, cf. Eq.(I_24) [15].

Il est facile, à partir de ce qui précède, de construire explicitement R_U en fonction de U :

$$x'_i = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(M'\sigma_i) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\vec{x}.U\vec{\sigma}U^{-1}\sigma_i) = \frac{1}{2}\sum_j \mathrm{Tr}(U\sigma_j U^{-1}\sigma_i)x_j \qquad \text{(I\_33)}$$

or $x'_i = \sum_j R_{ij}x_j$ (l'indice U de R_U n'a pas été rappelé) si bien que :

$$\boxed{R_{ij} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_i U\sigma_j U^{-1})} \qquad \text{(I\_34)}$$

Prenons un cas particulier : la rotation d'angle θ autour de Oz.

$$U(\theta,\hat{z}) = e^{i\theta\sigma_z/2} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & \\ & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \qquad \text{(I\_35)}$$

D'après la formule (I_34), on trouve :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{i\theta J_z} \qquad \text{(I\_36)}$$

15. Dans un espace de dimension deux, on peut construire des "compteurs des rotations" qui marchent modulo des multiples de 2π aussi grands que l'on veut. C'est ce que fait une montre à aiguilles qui est un compteur des rotations planes marchant modulo 12 fois 2π. Ceci vient du fait que le groupe de recouvrement de $SO(2)$ est $\mathbb{Z}$ et que l'homomorphisme de $SO(2)$ dans $\mathbb{Z}$ est par conséquent infiniment valué. Par contre, pour $SO(3)$, on peut montrer que l'on ne peut pas construire de "compteur de rotations" dans l'espace de dimension trois qui fonctionne modulo plus que 4π. En d'autres termes une machine quelconque faite de ficelles, de poulies, d'engrenages, etc... capables de mesurer des rotations dans l'espace est obligatoirement telle qu'au bout d'une rotation de 4π elle est revenue à son état initial. Joli, isn't it?

qui est, comme on pouvait l'espérer, $R(\theta, \hat{z})$.

Nous allons maintenant étudier deux points importants. D'abord nous ferons une étude succincte de certaines propriétés générales des représentations du groupe des rotations et nous verrons comment se transforment les spineurs. Ensuite nous ferons une courte revue du cas quantique et de l'utilisation des spineurs en mécanique quantique.

II DAVANTAGE SUR LES REPRÉSENTATIONS DU GROUPE DES ROTATIONS : VECTEURS, SPINEURS ET GÉNÉRATEURS

A Les représentations de SU(2)

Nous allons montrer comment, à partir d'un spineur et de $SU(2)$, on peut générer toutes les représentations de $SU(2)$. A vrai dire, nous ne prouverons pas que nous les obtenons toute ainsi, bien que ce soit le cas. On peut de façon générale montrer, au moins en principe, comment on peut construire toutes les représentations des groupes de Lie compacts, mais cela nécessite pas mal de travail et est au delà du but assigné à ces notes.

Considérons donc un spineur de composantes (ξ, η). Formons la quantité à $v+1$ composantes :

$$T^{(v+1)} = (\xi^v, \xi^{v-1}.\eta, \ldots, \xi.\eta^{v-1}, \eta^v) \tag{II-37}$$

On va montrer que $T^{(v+1)}$ engendre une représentation linéaire du groupe $SU(2)$, i.e. que les transformations de $SU(2)$ sur (ξ, η) induisent sur $T^{(v+1)}$ des transformations linéaires qui forment une représentation de $SU(2)$. Pour cela appliquons U à (ξ, η) et calculons la transformation de $T_i^{(v+1)} = \xi^{v-i}.\eta^i$:

$$\begin{aligned} T'^{(v+1)}_i &= \xi'^{v-i}.\eta'^i = (\alpha\xi - \bar{\beta}\eta)^{v-i}.(\beta\xi + \bar{\alpha}\eta)^i = \sum_{k=0}^{v} S_{ik}^{(v+1)} \xi^{v-k}.\eta^k \\ &= \sum_k S_{ik}^{(v+1)} T_k^{(v+1)} \end{aligned} \tag{II-38}$$

Donc la transformation des composantes de T est linéaire et il est immédiat de vérifier que les matrices $S^{(v+1)}(U)$ forment une représentation de $SU(2)$, i.e. que la composée de deux transformations U_1 et U_2 de $SU(2)$ induit une transformation sur les T_i qui est la composée des deux transformations $S^{(v+1)}(U_1)$ et $S^{(v+1)}(U_2)$. Les $T^{(v+1)}$ engendrent donc des représentations de $SU(2)$ à $v+1$ dimensions et ce quelque soit v. Telles quelles, les $S^{(v+1)}$ ne sont pas unitaires, mais il est facile de les rendre unitaires. Au lieu de T, considérons Q de composantes :

$$Q_m^{(j)} = \frac{\xi^{j+m} \,.\, \eta^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \tag{II-39}$$

III. Groupes de Lie — Compacité

Cet encadré va présenter des résultats généraux dont on se servira non seulement pour le groupe des rotations mais aussi pour le groupe de Lorentz.
Un groupe continu, i.e. qui n'est pas discret, est dit topologique si sa loi de composition interne ainsi que l'inversion sont des applications continues (i.e. si g est proche de g_2 alors $g_1 g$ est proche de $g_1 g_2$ et g^{-1} est proche de g_2^{-1}). Un groupe topologique est dit *compact* si l'espace de ses paramètres est compact, i.e. fermé et borné. Un groupe topologique est dit *groupe de Lie* si tous les paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de l'espace des paramètres sont essentiels, i.e. aucun d'eux n'est fonction des autres, et si $c_i = c_i(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ et $d_i = d_i(a_1, \ldots, a_n)$ définis par $g_3(\{c_i\}) = g_1(\{a_j\}).g_2(\{b_k\})$ et $g_1^{-1}(\{a_i\}) = g_4(\{d_j\})$ sont des fonctions analytiques de leurs arguments. C'est ce qui arrivera en pratique dans la suite et nous n'aurons affaire qu'aux groupes de Lie.
Deux théorèmes seront importants pour la suite :

1) Pour les groupes de Lie compacts, on peut prouver que
- dans chaque classe de représentations équivalentes il y a une représentation **unitaire**,
- toute représentation unitaire est complètement réductible,
- toute représentation irréductible est de dimension finie.

2) Pour les groupes non compacts, on peut prouver que
- toutes les représentations continues d'un groupe semi-simple sont complètement réductibles (c'est en fait vrai indépendamment de la compacité du groupe),
- toutes les représentations unitaires autres que la (ou les) représentation(s) de dimension un sont de dimension infinie.

Le premier théorème nous permet pour les groupes compacts, le groupe des rotations en particulier, de ne nous intéresser qu'aux **représentations irréductibles, de dimension finie, unitaires et inéquivalentes**.
Le second théorème nous assure que pour le groupe de Lorentz qui est non compact, ce n'est que dans l'espace de Hilbert qui est de dimension infinie que l'on pourra avoir des représentations unitaires (et donc qui conservent la norme des vecteurs d'états), cf. le théorème de Wigner.

où on a défini $j = v/2$ et m peut prendre les valeurs entre $-j \leq m \leq +j$ par saut de une unité (la représentation est donc de dimension $2j+1$). j prend donc toutes les valeurs positives entières ou demi entières. Les matrices (unitaires, le vérifier) qui transforment les $Q^{(j)}$ sont appelées les D^j. On peut montrer que l'ensemble des D^j quand j varie, forme l'ensemble de toutes les représentations unitaires irréductibles et inéquivalentes de $SU(2)$. Lorsque j est entier, ces représentations forment aussi l'ensemble des représentations de $SO(3)$. Lorsque j est demi entier, il s'agit de "représentations" bi-valuées de $SO(3)$.

On voit donc qu'à partir des spineurs, on peut construire toutes les autres représentations. On pourrait montrer que, comme on s'y attend, les $D^j(\vec{\theta})$ peuvent s'écrire pour tout j

$$D^j(\vec{\theta}) = e^{i\vec{\theta}.\vec{\mathcal{J}}} \tag{II\_40}$$

avec les trois $\mathcal{J}_i$ des matrices hermitiques $(2j+1)\times(2j+1)$ qui vérifient l'algèbre de Lie de $SO(3)$. On pourrait également montrer que $\vec{\mathcal{J}}^2$ est toujours proportionnel à l'identité avec un facteur de proportionnalité $j(j+1)$ et que $\mathcal{J}_z$ a comme valeur propres m prenant toutes les valeurs entre $-j$ et $+j$ par saut de une unité.

Nous avons ainsi atteint notre but pour le groupe des rotations qui était de trouver toutes les représentations irréductibles et unitaires de ce groupe. Nous verrons dans la suite que l'on peut de façon absolument équivalente engendrer toutes les représentations du groupe des rotations par produit tensoriel de la représentation (spinorielle) 2×2, ce qui est très important pour la mécanique quantique lorsque l'on compose des spins. Mais avant, nous avons encore besoin de voir une petite subtilité plus facile à comprendre sur l'exemple des vecteurs que sur celui des spineurs. Et d'abord, commençons par quelques modestes théorèmes.

B La convention d'Einstein et quelques menus théorèmes

• Nous adopterons dans toute la suite la convention d'Einstein qui consiste à sous entendre le symbole de sommation lorsque dans un mônome un indice de sommation figure deux fois. En clair, ceci signifie que A_iB_i signifie, sauf mention explicite du contraire, $\sum_i A_iB_i$. L'intérêt de cette convention vient de ce que lorsque l'on utilise à haute dose l'algèbre linéaire (ou multilinéaire), un indice répété deux fois est toujours, sauf cas exceptionnel, un indice muet de sommation. Dès lors, il est plus simple d'inverser les conventions usuelles : on ne met rien quand il y a sommation et au contraire on indique explicitement quand il n'y a pas sommation (avec des mots ou avec un symbole spécial laissé à l'imagination de chacune). *Ceci n'entraîne jamais de confusion.* Exemple :

$$A_iB_kC_kD_{ij}M_l = \sum_{i,k} A_iB_kC_kD_{ij}M_l = A_iD_{ij}(\vec{B}\,.\,\vec{C})M_l$$

• Nous avons vu au chapitre précédent que :

$$M' = UMU^{-1} = \vec{x}.(U\vec{\sigma}U^{-1}) = \vec{x}\,'.\vec{\sigma} = (R_U\vec{x}).\vec{\sigma}$$

soit en composantes

$$\sum_i x_iU\sigma_iU^{-1} = \sum_{i,j} R_{ji}x_i\sigma_j$$

soit en manipulant un peu cette équation, en utilisant la convention d'Einstein et comme ceci est vrai pour tout vecteur $\vec{x}$:

$$\boxed{U^{-1}\sigma_i U = R_{ij}\sigma_j} \tag{II\_41}$$

• Une relation analogue existe pour les J_i :

$$\boxed{R^{-1}J_i R = R_{ij}J_j} \tag{II\_42}$$

On peut prouver directement cette relation, mais nous allons nous contenter de montrer qu'elle se réduit pour les transformations infinitésimales à l'algèbre de Lie de $SO(3)$. C'est élémentaire si l'on se souvient de la note en bas de la page 23. En effet, on a d'une part

$$R_{ij}J_j = J_i - \epsilon_{ikj}\, d\theta_k J_j$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} R^{-1}J_i R &= (\mathbb{1} - i\, d\vec{\theta}.\vec{J})J_i(\mathbb{1} + i\, d\vec{\theta}.\vec{J}) \\ &= J_i + i\, d\theta_k [J_i, J_k] \\ &= J_i - \epsilon_{ikj}\, d\theta_k J_j \end{aligned} \tag{II\_43}$$

qui est donc bien la même chose. Les relations (II_41) et (II_42) sont en quelque sorte les formes intégrées des algèbres de Lie de $SU(2)$ et $SO(3)$ respectivement. Nous allons voir au chapitre suivant la signification de ces relations et nous verrons toute leur importance dans le cadre quantique.

C Base et coordonnées sphériques - Opérateurs vectoriels

Nous allons maintenant voir que des opérateurs linéaires peuvent avoir un caractère tensoriel par rapport aux rotations. Ceci sera particulièrement important dans le cadre quantique où les grandeurs physiques sont représentées par des opérateurs. Nous allons raisonner sur les générateurs des rotations qui, comme nous allons le montrer, forment un opérateur vectoriel. La généralisation à d'autres opérateurs ne posera pas de problème.

Par souci de clarté, appelons $\mathcal{B}$ l'espace de base, euclidien, minkowskien, etc... et $\mathcal{R}$ l'espace de représentation (voir la note 17, page 14 et l'encadré I). Bien entendu, il y a autant d'espaces de représentation que de représentations et l'on devrait donc indicer ces espaces. Dans la pratique, il n'y aura jamais de confusion possible et nous omettrons cet indice.

Pour la suite, il sera important de bien faire la distinction entre, d'une part, les opérateurs linéaires qui représentent les éléments du groupe et, d'autre part, les matrices représentant ces opérateurs *une fois fait choix d'une base dans l'espace vectoriel* $\mathcal{R}$ *de représentation*. Il se peut donc, et c'est en fait fréquent, que des opérateurs différents soient représentés par les mêmes matrices car les bases de $\mathcal{R}$ dans lesquelles sont évalués ces opérateurs sont différentes. Ainsi, nous pouvons très bien considérer les générateurs des rotations autour de deux systèmes d'axes de $\mathcal{B}$ différents et évaluer les matrices les représentant dans deux bases de $\mathcal{R}$ telles que ces matrices soient identiques. Il s'agit donc d'être prudent et de savoir ce que l'on fait. Pour lever toute ambiguïté, nous noterons, lorsqu'il y a possibilité de confusion, les matrices par la même lettre que les opérateurs mais en indiquant explicitement en exposant la base de projection choisie dans $\mathcal{R}$.

En règle générale, les espaces $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$ n'ont rien à voir et ne sont même pas de même dimension. L'exception est le cas vectoriel où ces deux espaces sont isomorphes si bien qu'on les confond la plupart du temps en physique pour cette raison (on représente par exemple sur un même dessin position, vitesse, force, etc... alors que ces quantités ne peuvent pas être additionnées et n'appartiennent donc pas au même espace vectoriel). Nous verrons sous peu, dans le cadre quantique en particulier où *l'espace de représentation est l'espace (complexe) de Hilbert des états*, que, même dans le cas vectoriel, la distinction entre ces deux espaces n'est pas inutile.

Introduisons d'emblée les notations qui seront commodes dans le formalisme quantique et notons par des kets $\{|\alpha\rangle\}$ une base choisie dans $\mathcal{R}$ et par des bras la base duale :

$$|\alpha\rangle^\dagger = {}^t\bar{|\alpha\rangle} = \langle\alpha|$$

Ainsi, pour le cas spinoriel, une base commode dans $\mathcal{R}$ est évidemment celle dans laquelle les générateurs de $SU(2)$, $\sigma_{x,y,z}/2$, sont représentés par une demi fois les matrices de Pauli $\sigma_{1,2,3}/2$. Nous noterons (z) cette base :

$$\{|+,z\rangle, |-,z\rangle\}. \tag{II\_44}$$

C'est évidemment celle où σ_3 est diagonale: $\sigma_3|\pm,z\rangle = \pm|\pm,z\rangle$, $\sigma_+|+,z\rangle = 0, \sigma_+|-,z\rangle = |+,z\rangle$ où $\sigma_+ = 1/2\,(\sigma_1 + i\sigma_2)$. De même, dans le cas vectoriel, nous noterons en cas de besoin $\{|e_i\rangle\}$ la base canoniquement associée aux axes $\{\vec{e}_i\}$ et que nous avons jusqu'à maintenant confondue avec elle.

Nous allons maintenant montrer que les relations (II_41,II_42) ont une interprétation très simple. La généralisation de ces relations permet de définir la notion d'opérateurs tensoriels irréductibles dont la transposition au cas quantique s'avére très importante puisqu'elle permet de montrer le théorème de Wigner-Eckart. Les calculs qui vont suivre ont comme seul but de montrer que la relation (II_41) est l'analogue pour les générateurs de $SU(2)$ du fait suivant, typique des vecteurs ordinaires : si l'on tourne un vecteur $\vec{v}$ en $R\vec{v}$ et que l'on tourne en même temps la base $\{\vec{e}\}$ en $\{R\vec{e}\}$, alors le nouveau vecteur a les mêmes composantes sur la nouvelle base que l'ancien sur l'ancienne base. Cette propriété étant vraie pour les générateurs de $SU(2)$ — c'est le sens de la relation (II_41) — on dit qu'ils forment un opérateur vectoriel. Cette notion se transpose à d'autres opérateurs que les générateurs vérifiant une relation analogue à (II_41), voir la suite. Montrons maintenant qu'il en est bien ainsi.

> **Exercice** : On pose $\sigma'_i = U^{-1}\sigma_i U$ avec U une matrice de $SU(2)$. Montrer que les σ'_i sont hermitiques et vérifient la même algèbre de Lie que les σ_i. Adapter ce calcul au cas des J_i.

De l'exercice précédent, on déduit que les opérateurs primés sont des générateurs très acceptables et l'on s'attend par conséquent à ce qu'ils soient les générateurs de "rotation" de $SU(2)$ autour d'axes $\vec{e}_i\,'$ à déterminer. On peut voir qu'il en est bien ainsi par le raisonnement suivant. Considérons une matrice générique de $SU(2)$ qui s'écrit :

$$V = e^{i\theta_i\sigma_i/2}$$

les $\sigma_{1,2,3}/2$ étant les matrices représentant, dans $SU(2)$, les générateurs des "rotations" par rapport aux axes $\{\vec{e}_i\}$. La base choisie dans $\mathcal{R}$ est entièrement fixée par le fait qu'il s'agit des matrices de Pauli et est la base (II_44). V est évidemment la matrice représentant, dans la base (II_44), la rotation de paramètres $\vec{\theta} = \theta_i\vec{e}_i$ dans l'espace de base.

Considérons maintenant les matrices $\sigma'_i = U^{-1}\sigma_i U = R_{ij}\sigma_j$ où U est une matrice quelconque de $SU(2)$ et $R = R_U$ est la matrice de $SO(3)$ associée à U, Eq.(I_34), ainsi que le système d'axes $\{\vec{e}_i\,'\} = \{R\vec{e}_i\}$ de l'espace de base $\mathcal{B}$. On a donc deux bases $\{\vec{e}_i\}$ et $\{\vec{e}_i\,'\}$ dans $\mathcal{B}$ et une seule $\{|\pm, z\rangle\}$ dans $\mathcal{R}$. Dans cette base le vecteur $\vec{\theta}$ a comme composantes : $\theta'_i = R_{ij}\theta_j$. Comme R est orthogonale, $R^{-1} = {}^tR$, on a alors évidemment

$$\theta'_i\sigma'_i = \theta_i\sigma_i = \vec{\theta}\,.\,\vec{\sigma}$$

et par conséquent

$$V = e^{i\theta'_i\sigma'_i/2}.$$

Cette relation s'interprète simplement: V est toujours la matrice "représentant" dans la base $\{|\pm, z\rangle\}$ la rotation de paramètres $\vec{\theta}$ mais exprimée en fonction des générateurs des rotations autour des $\vec{e}\,'_i$. C'est la relation que l'on écrirait si l'on avait choisi les $\{R\vec{e}_i\}$ comme axes autour desquels sont effectuées les rotations dans $\mathcal{B}$, tout en conservant l'ancienne base propre $\{|\pm, z\rangle\}$ de σ_{e_z} — et non de $\sigma_{e_{z'}}$ — dans $\mathcal{R}$.

Les matrices $\sigma'_i/2$ sont donc les matrices associées aux générateurs des "rotations" de $SU(2)$ autour des $\{R\vec{e}_i\}$ évalués dans la base (II_44). Il en va de même pour les J'_i définis par $J'_i =$

$R_{ij}J_j = R^{-1}J_iR$ qui sont les générateurs des rotations autour des nouveaux axes, les $R\vec{e}_i$, évalués dans l'ancienne base, les $\vec{e}_i$ (ou plus exactement les $|e_i\rangle$).

Le sens de (II-42) est donc :

$$J^{(e)}_{Re_i} = R_{ij}J^{(e)}_{e_j} = R^{-1}J^{(e)}_{e_i}R \tag{II-45}$$

où l'indice indique l'axe (de $\mathcal{B}$) autour duquel l'opérateur est le générateur et l'exposant la base (de $\mathcal{R}$) dans laquelle est évaluée la matrice. De même pour les σ_i :

$$\sigma^{(z)}_{Re_i} = R_{ij}\sigma^{(z)}_{e_j} = U^{-1}\sigma^{(z)}_{e_i}U \tag{II-46}$$

où (z) signifie la base $\{|\pm, z\rangle\}$.

On peut faire encore un peu mieux en effectuant, en plus du changement d'axes de rotation, un changement de base dans $\mathcal{R}$ pour prendre à chaque fois la base de $\mathcal{R}$ “naturellement associée” au système d'axes de $\mathcal{B}$. Cela consiste dans le cas $SU(2)$ à prendre dans $\mathcal{R}$ la base prope de $\sigma_{e_{z'}}$ et dans celui de $SO(3)$ la base $\{R|e\rangle\}$. Nous allons ainsi montrer que les matrices $J^{(Re)}_{Re_i}$ représentant les J_{Re_i} dans la base $\{R|e\rangle\}$ sont identiques aux matrices $J^{(e)}_{e_i}$ représentant les J_{e_i} dans la base $\{|e\rangle\}$.

Dans les notations précédentes, on a :

$$\begin{aligned}\left(R^{-1}\ J^{(e)}_{e_i}\ R\right)_{jk} &= \left(J^{(e)}_{Re_i}\right)_{jk}\\ &= \langle e_j|J_{Re_i}|e_k\rangle\\ &= R_{lj}R_{mk}\langle e'_l|J_{Re_i}|e'_m\rangle\\ &= \left(R^{-1}\ J^{(Re)}_{Re_i}\ R\right)_{jk}\end{aligned} \tag{II-47}$$

et donc

$$J^{(e)}_{e_i} = J^{(Re)}_{Re_i} \tag{II-48}$$

L'exact analogue de cette relation existe évidemment aussi pour le cas spinoriel avec les σ_i (le montrer). Par conséquent, on peut interpréter les relations (II-41,II-42) en disant qu'un changement d'axes de rotation (dans $\mathcal{B}$) — terme $R_{ij}J_j$ ou $R_{ij}\sigma_j$ — est matriciellement exactement compensé par un changement de base dans $\mathcal{R}$ — terme $R^{-1}J_iR$ ou $U^{-1}\sigma_iU$.

Tout compte fait, la relation (II-41) exprime le fait rassurant, et seul compatible avec l'invariance par rotation, que quel que soient les axes $Oxyz$, on peut toujours choisir les matrices de Pauli $\sigma_{1,2,3}/2$ pour représenter les générateurs $\sigma_{x,y,z}/2$ de $SU(2)$ suivant ces axes à condition de prendre (II-44) comme base dans l'espace de représentation, i.e. de prendre la base propre de σ_z (même interprétation pour $SO(3)$). S'il n'en était pas ainsi, on pourrait, par simple examen des matrices représentant les générateurs, savoir autour de quels axes sont effectuées les rotations et par conséquent mettre en évidence de façon absolue son orientation dans l'espace.

Si l'on examine attentivement tous les calculs précédents, on s'apercevra que l'on peut en définitive traiter les générateurs des rotations comme des vecteurs ordinaires pour ce qui est du changement d'axes de rotation. On appelle pour cette raison, les J_i et les σ_i des opérateurs vectoriels. On verra dans le cas du groupe de Lorentz que là aussi l'ensemble des générateurs a un caractère tensoriel.

En fait, l'histoire ne s'arrête pas là. Alors que la relation (II.41) donne la transformation la plus générale des σ_i qui 1) préserve l'hermiticité des σ_i et 2) préserve l'algèbre de Lie de $SU(2)$, il n'en est pas de même pour la relation (II.42) car on pourrait choisir les R unitaires et non pas seulement orthogonales réelles. Les

$$J'_i = N^{-1} J_i N \tag{II.49}$$

avec N unitaire sont de très bons générateurs de $SO(3)$[16]. On a maintenant :

$$J^{(Ne)}_{e_i} = {}^t N^\dagger \, J^{(e)}_{e_i} \, {}^t N \tag{II.50}$$

ce qui correspond à un changement de base dans un espace de représentation complexe cette fois. A quoi tout cela sert-il ? D'abord, il faut réaliser qu'en mécanique quantique, l'espace de représentation, en fait l'espace de Hilbert des états, est effectivement *complexe*. Ensuite on est souvent intéressé à se placer dans la base où $\vec{J}^2$ et J_z sont diagonaux, ce qu'ils ne sont pas dans la base des $|e_i\rangle$, cf. Eq.(I.8). En fait, $\vec{J}^2$ est comme on s'y attend proportionnel à l'identité et vaut, comme on peut facilement le vérifier explicitement[17] :

$$\vec{J}^2 = 2.\mathbb{1} \tag{II.51}$$

La (petite) subtilité que l'on rencontre ici est que J_z ne peut pas être diagonalisée avec seulement une matrice orthogonale[18], le changement de base qui la diagonalise est obligatoirement de type (II.49) avec N donnée par :

$$N = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{II.52}$$

Dans cette nouvelle base, on a d'après (II.50) :

$$J^{(Ne)}_z = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \tag{II.53}$$

16. Evidemment, dans ce cas, on ne peut plus avoir $N^{-1}\hat{J}_i N = N_{ij}\hat{J}_j$ car alors les N_{ij} devraient être réels (le montrer), ce qui n'est le cas que si les N sont des matrices de $SO(3)$.

17. On peut vérifier également très simplement que dans la représentation spinorielle $\vec{\sigma}^2/4$ est également proportionnel à l'identité avec un facteur de proportionnalité égal à $3/4$.

18. Si J_z était une matrice hermitique *réelle* alors elle serait diagonalisable par une matrice orthogonale.

et l'on retrouve le fait bien connu que pour la représentation $j = 1$, J_z a comme valeurs propres $-1, 0, +1$. Cette base est appelée la base sphérique. Les coordonnées (et les vecteurs de base) y sont reliées à celles de la base cartésienne par

$$\begin{cases} V_+ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y) \\ V_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y) \\ V_0 &= V_z \end{cases} \tag{II\_54}$$

où

$$|V\rangle = V_x|e_x\rangle + V_y|e_y\rangle + V_z|e_z\rangle = V_+|e_+\rangle + V_-|e_-\rangle + V_0|e_0\rangle \tag{II\_55}$$

et $|e_{+,-,0}\rangle$ sont respectivement les vecteurs de base de la base sphérique, i.e. la base propre, avec les valeurs propres $+1, -1, 0$.

D Les tenseurs - produit tensoriel de représentations

Nous allons voir qu'il existe une façon différente de ce que nous avons vu jusqu'a maintenant de générer les représentations à partir de “produits” de représentations de dimension inférieure. C'est la notion de produit tensoriel, si important en mécanique quantique, qui fournit l'outil approprié.

Et d'abord qu'est ce qu'un tenseur et qu'un produit tensoriel au sens de l'algèbre linéaire (et non au sens de la théorie des groupes) ? C'est l'extension la plus simple à laquelle on puisse penser de la notion de vecteurs. $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ étant deux espaces vectoriels de dimension d_1 et d_2 et ayant comme base $\{|e_i^1\rangle\}$ et $\{|e_j^2\rangle\}$ respectivement, on définit le produit tensoriel $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ de ces espaces comme l'espace vectoriel de dimension $d_1 d_2$ engendré par la base $\{|e_i^1\rangle \otimes |e_j^2\rangle\}$. Un vecteur de cet espace se décompose en :

$$|v\rangle = v_{ij}|e_i^1\rangle \otimes |e_j^2\rangle \qquad \text{(sommation sous - entendue)} \tag{II\_56}$$

Lorsqu'un vecteur w est le produit tensoriel de deux vecteurs : $|w\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ alors $w_{ij} = a_i b_j$. Cependant, en général, un vecteur de l'espace produit est une somme de produits tensoriels.

Le produit tensoriel est par définition linéaire pour chacun des espaces $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$: $(\lambda|a\rangle + \mu|a'\rangle) \otimes |b\rangle = \lambda|a\rangle \otimes |b\rangle + \mu|a'\rangle \otimes |b\rangle$ et idem pour les vecteurs de $\mathcal{E}_2$.

La simplicité de la notion de produit tensoriel vient de ce que l'on peut définir naturellement le produit tensoriel de deux opérateurs linéaires A et B agissant dans $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ par :

$$(A \otimes B)\left(|a\rangle \otimes |b\rangle\right) = (A|a\rangle) \otimes (B|b\rangle) = \left(A_{ij} a_i |e_j^1\rangle\right) \otimes \left(B_{kl} b_k |e_l^2\rangle\right) \tag{II\_57}$$

$A \otimes B$ est encore linéaire dans $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ et doit donc pouvoir se représenter matriciellement dans cet espace. Si l'on range conventionnellement les $d_1 d_2$ composantes de $|a\rangle \otimes |b\rangle$ dans l'ordre suivant:

$$(a_1|b\rangle, \ldots, a_{d_1}|b\rangle) = (a_1 b_1, a_1 b_2, \ldots, a_1 b_{d_2}, a_2 b_1, \ldots, a_{d_1} b_{d_2})$$

alors la matrice représentant $A \otimes B$ dans la base $|e^1_k\rangle \otimes |e^2_l\rangle$ rangée dans l'ordre correspondant aux composantes précédentes de $|a\rangle \otimes |b\rangle$ est la matrice $d_1 d_2 \times d_1 d_2$ (le vérifier) :

$$\begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \ldots & A_{1d_1}B \\ A_{21}B & & & \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ A_{d_1 1}B & & & A_{d_1 d_1}B \end{pmatrix} \tag{II\_58}$$

où $A_{ij}B$ est A_{ij} fois la matrice $d_2 \times d_2$ représentant B dans la base des $|e^2_l\rangle$.

Supposons maintenant que nous ayons deux représentations unitaires d'un groupe G, $T_1(g)$ et $T_2(g)$, agissant dans des espaces de représentation $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Il est immédiat de voir que

$$T(g) = T_1(g) \otimes T_2(g) \tag{II\_59}$$

est une représentation unitaire de G dite produit tensoriel (ou direct) des deux représentations T_1 et T_2. *En général cette représentation est réductible* et nous verrons sur l'exemple de la composition de deux spins 1/2 comment la réduire.

Un cas fréquent et important est celui où l'on fait n fois le produit tensoriel d'un même espace vectoriel comme par exemple $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \ldots$ ou $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \ldots$ Dans ce dernier cas, un vecteur W de cet espace s'écrit :

$$W = W_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} |\alpha_1\rangle \otimes \ldots \otimes |\alpha_n\rangle \tag{II\_60}$$

Supposons que dans une rotation (point de vue passif), les vecteurs de base $|\alpha\rangle$ se transforment par $SU(2)$ (comme en (III_16), Appendice III) :

$$|\alpha'\rangle = \bar{U}_{\alpha\beta}|\beta\rangle \qquad \text{où } U \in SU(2) \tag{II\_61}$$

Cette transformation induit une transformation sur les composantes $W_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ de W car celui-ci est supposé invariant dans ce point de vue passif: $W = W'$. On en déduit que $W_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ se transforme grâce une matrice U par indice (le montrer et voir l'Appendice III) :

$$W = W'_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} |\alpha'_1\rangle \otimes \ldots \otimes |\alpha'_n\rangle \quad \Longrightarrow \quad W'_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = U_{\alpha_1 \beta_1} \ldots U_{\alpha_n \beta_n} W_{\beta_1 \ldots \beta_n} \tag{II\_62}$$

Ceci se généralise évidemment à n'importe quel groupe G. On en déduit que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des indices d'un groupe G, i.e. $Z'_\alpha = g_{\alpha\beta} Z_\beta$, $g \in G$ alors:

$W_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ se transforme comme le produit $Z_{\alpha_1} \ldots Z_{\alpha_n}$ des composantes Z_α de Z.

On dit qu'il s'agit d'un tenseur de rang n de G (dans le cas de $SU(2)$ d'un multispineur).

Exercice : Comment est défini un tenseur de $SO(3)$? Comment ses composantes se transforment elles lors d'une rotation passive ?

Nous verrons dans la suite que le produit tensoriel de deux spins 1/2, qui correspond par conséquent à un objet à deux indices spinoriels, donne une représentation *réductible* qui se décompose en une représentation de spin 1 et une de spin 0. La partie de spin 1 est la partie symétrique dans les deux indices de spin et celle de spin 0 la partie antisymétrique. Ceci montre qu'un indice vectoriel est équivalent à deux indices spinoriels symétrisés et pas d'indice à deux indices spinoriels antisymétrisés. Ceci se généralise aux représentations de spin plus élevé.

On voit sur ce qui précède que la tensorialité (au sens des groupes) d'un objet à n indices est relative à un groupe de transformations. Ainsi, un objet mathématique peut très bien porter des indices de nature différente : par exemple n_1 indices de $SU(2)$, n_2 indices du groupe de Lorentz, etc... Dans une transformation de $SU(2)$, un tel objet verra ses n_1 indices de $SU(2)$ se transformer et les n_2 de Lorentz être inertes et vice-versa pour une transformation de Lorentz. C'est ce qui arrive couramment dans les théories de jauge où le groupe de symétrie total de la théorie est : groupe de Lorentz (en fait Poincaré) $\otimes$ groupe de jauge et où par conséquent les objets que l'on doit considérer ont une nature tensorielle mixte. Les champs de jauge par exemple sont en même temps des (quadri-) vecteurs pour le groupe de Lorentz et des objets qui engendrent une représentation (dite adjointe) du groupe de jauge.

Pour illustrer la notion de produit tensoriel de représentations et sa décomposition en représentations irréductibles, nous allons maintenant considérer l'exemple du produit de deux représentations de "spin 1/2".

Nous allons commencer par prouver encore quelques théorèmes.

E Autres petits théorèmes

• "Le tenseur complètement antisymétrique à deux indices est un tenseur invariant de $SU(2)$."

Considérons le tenseur antisymétrique à deux indices dont les composantes dans un repère valent par définition :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \tag{II\_63}$$

Dans une transformation de $SU(2)$ ses composantes se transforment en :

$$\begin{aligned} \epsilon'_{\alpha\beta} &= U_{\alpha\gamma} U_{\beta\delta} \epsilon_{\gamma\delta} \\ &= U_{\alpha\gamma} \epsilon_{\gamma\delta} \left({}^tU\right)_{\delta\beta} \end{aligned} \tag{II\_64}$$

soit matriciellement :

$$\epsilon' = U\epsilon\, {}^tU \tag{II\_65}$$

Il suffit maintenant de prendre la paramétrisation générale d'une matrice de $SU(2)$, Eq.(I_26), et d'effectuer le produit matriciel pour voir que quelque soit U on a : $\epsilon'_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}$. *Donc* $\epsilon = \epsilon_{\alpha\beta}|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ *est un tenseur dont les composantes sont invariantes* dans n'importe quelle transformation de $SU(2)$. On l'appelle le tenseur invariant. On peut montrer réciproquement que tous les tenseurs invariants de rang deux de $SU(2)$ sont proportionnels à ϵ (unicité de ce tenseur à un facteur près) [19].

- "Z_α et $\bar{Z}_\alpha$ engendrent des représentations de $SU(2)$ équivalentes."

C'est évident à partir de ce qui précède. Pour toute transformation de $SU(2)$:

$$Z'_\alpha = U_{\alpha\beta} Z_\beta \Longrightarrow \bar{Z}'_\alpha = \bar{U}_{\alpha\beta} \bar{Z}_\beta \tag{II\_66}$$

et

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \left(U\epsilon\, {}^tU\right)_{\alpha\beta} \Longrightarrow \bar{U} = \epsilon U \epsilon^{-1} \tag{II\_67}$$

Or cette relation est précisément la définition de l'équivalence de deux représentations puisque la matrice ϵ est unitaire. D'où le résultat.

- " $({}^tZ\epsilon)_\alpha$ se transforme comme $(Z^\dagger)_\alpha$."

On a

$$\left({}^tZ\epsilon\right)'_\alpha = Z'_\beta \epsilon_{\beta\alpha} = Z_\gamma U_{\beta\gamma} \epsilon_{\beta\alpha} = Z_\gamma \left({}^tU\epsilon\right)_{\gamma\alpha} = Z_\gamma \epsilon_{\gamma\beta} U^\dagger_{\beta\alpha} = \left({}^tZ\epsilon\right)_\beta U^\dagger_{\beta\alpha} \tag{II\_68}$$

et d'autre part

$$(Z^{\dagger\prime})_\alpha = \bar{Z}'_\alpha = \bar{Z}_\beta \bar{U}_{\alpha\beta} = \bar{Z}_\beta U^\dagger_{\beta\alpha} = \left(Z^\dagger U^\dagger\right)_\alpha \tag{II\_69}$$

Les deux expressions se transforment donc bien de la même manière.

19. Pour $SO(3)$, le tenseur antisymétrique invariant est ϵ_{ijk}.

• "Z étant un spineur, $Z^\dagger Z$ est un scalaire et $\vec{V} = Z^\dagger \vec{\sigma} Z$ est un vecteur et, par conséquent, il en va de même de $\vec{W} = {}^tZ\epsilon\vec{\sigma}Z$."

$$(Z^\dagger Z)' = Z^\dagger U^\dagger U Z = Z^\dagger Z \qquad \text{(II\_70)}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} V_i' &= \left(Z^\dagger \vec{\sigma} Z\right)_i' \\ &= Z^\dagger U^\dagger \sigma_i U Z \end{aligned} \qquad \text{(II\_71)}$$

Or, d'après la célébrissime relation (II_41), on déduit

$$V_i' = Z^\dagger R_{ij}\sigma_j Z = R_{ij}V_j \qquad \text{(II\_72)}$$

D'où le résultat. Evaluons les coordonnées cartésiennes de $\vec{W}$: $W_x = {}^tZ\epsilon\sigma_x Z$ et idem pour W_y et W_z. On se place, dans l'espace des spineurs, dans la base propre de σ_z où $\sigma_z = \sigma_3$. Un calcul élémentaire donne [20] :

$$\left\{\begin{array}{l} W_x = Z_2^2 - Z_1^2 \\ W_y = -i(Z_1^2 + Z_2^2) \\ W_z = 2Z_1Z_2 \end{array}\right. \qquad \text{(II\_73)}$$

Passons maintenant dans la base sphérique (II_54) :

$$\left\{\begin{array}{l} W_+ = -\sqrt{2}Z_2^2 \\ W_- = -\sqrt{2}Z_1^2 \\ W_0 = 2Z_1Z_2 \end{array}\right. \qquad \text{(II\_74)}$$

qui, à un facteur 2 et un signe sur les composantes W_x et W_y près, sont les composantes $Q_m^{(j)}$ du tenseur $Q^{(1)}$ construites en (II_39). C'est une façon supplémentaire de retrouver le fait qu'il s'agit d'un vecteur.

Anticipons sur le chapitre traitant de la mécanique quantique et faisons maintenant le lien entre ces résultats et le produit tensoriel de deux spins 1/2.

F Comment construire des vecteurs à partir de spineurs - composition de deux spins 1/2

Nous avons déjà vu que $Z^\dagger\vec{\sigma}Z$ est un vecteur si Z est un spineur. Nous allons retrouver dans ce paragraphe ce résultat sous une forme un peu différente et faire le lien avec la mécanique quantique où on "sait" que la composition de deux spins 1/2 donne un spin 1 et un spin 0.

20. C'est un calcul particulièrement intéressant de vérifier que lors d'une rotation, la transformation des Z_α induit une transformation sur les W_i qui est bien celle des composantes d'un vecteur.

Nous en profiterons pour faire le lien entre les notations des chapitres précédents et celle utilisée couramment en mécanique quantique.

$\mathbb{C}^2$ est l'espace de représentation pour $j = 1/2$ et on doit donc en faire le produit tensoriel par lui même pour composer deux telles représentations. La base de $\mathbb{C}^2$ définie en (II_44) est : $\{|\pm\rangle\} = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ et l'espace produit tensoriel de $\mathbb{C}^2$ par lui même est donc engendré par $\{|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle\} = \{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ où par définition $|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$, etc... Commençons pour simplifier par effectuer le produit tensoriel d'un spineur par lui - même :

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} = Z \otimes Z &= (Z_\alpha|\alpha\rangle) \otimes (Z_\beta|\beta\rangle) && \text{(II_75)}\\
&= Z_\alpha Z_\beta \, |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle && \text{(II_76)}\\
&= Z_1^2 |\uparrow\uparrow\rangle + Z_2^2 |\downarrow\downarrow\rangle + \sqrt{2} Z_1 Z_2 \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} && \text{(II_77)}
\end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{W}_{11} = Z_1^2 \quad , \quad \mathcal{W}_{-1-1} = Z_2^2 \quad , \quad \mathcal{W}_{1-1} = \sqrt{2} Z_1 Z_2 \qquad \text{(II\_78)}$$

qui sont les composantes $Q_m^{(1)}$ du tenseur $Q^{(1)}$ à un facteur $\sqrt{2}$ près [21]. On voit donc que l'on a généré la représentation de “spin 1” par produit tensoriel de deux représentations de spin 1/2. Mais il faut faire un peu attention car on a fait un produit tensoriel très particulier car ne faisant intervenir que le seul spineur Z. Ainsi toutes les composantes de $\mathcal{W}$ sont obligatoirement symétriques dans l'échange des Z_α et on voit d'ailleurs que $\mathcal{W}$ appartient au sous espace engendré par les produits tensoriels symétriques des vecteurs de base. Quid du produit de deux spineurs quelconques ?

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}' = Y \otimes Z &= (Y_\alpha|\alpha\rangle) \otimes (Z_\beta|\beta\rangle) && \text{(II_79)}\\
&= Y_\alpha Z_\beta |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle && \text{(II_80)}\\
&= Y_1 Z_1 |\uparrow\uparrow\rangle + Y_2 Z_2 |\downarrow\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 Z_2 + Y_2 Z_1) \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} && \text{(II_81)}\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} && \text{(II_82)}
\end{aligned}$$

Pour bien voir ce qui se passe, construisons les générateurs des rotations dans l'espace produit. Prenons une rotation infinitésimale d'angle $d\vec{\theta}$:

$$e^{id\vec{\theta}.\vec{\sigma}/2} \otimes e^{id\vec{\theta}.\vec{\sigma}/2} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + id\vec{\theta}. \left(\frac{\vec{\sigma}}{2} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \frac{\vec{\sigma}}{2} \right) \qquad \text{(II\_83)}$$

et donc les générateurs sont les $\mathcal{J}_i = \frac{\sigma_i}{2} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \frac{\sigma_i}{2}$. Un calcul élémentaire (mais impératif à faire une fois dans sa vie) montre facilement que $\mathcal{J}^2$ n'est pas diagonal dans la base $\{|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle\}$

21. Noter que, ce faisant, on a associé à la matrice 2×2, $W_{\alpha\beta} = Z_\alpha Z_\beta$ le vecteur à trois composantes $\sqrt{2}(W_+, W_-, W_0)$

mais l'est dans

$$\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, \frac{(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)}{\sqrt{2}}, \frac{(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)}{\sqrt{2}}\}$$

Dans le sous espace engendré par $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}\}$, $\mathcal{J}^2 = 2.\mathbb{1}$ et $\mathcal{J}_z$ est diagonal avec les valeurs propres $+1, -1$ et 0 respectivement[22]. La restriction des $\mathcal{J}_i$ au sous espace de dimension trois précédent n'est, ni plus ni moins, que le générateur des rotations de $SO(3)$ évalué dans la base où J_z est diagonale, Eq.(II_53).

Dans l'autre sous espace, $\mathcal{J}^2(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2} = 0$ et idem pour $\mathcal{J}_z$. Il s'agit donc dans ce sous espace du générateur de $SO(3)$ pour la représentation unité.

Les trois combinaisons symétriques sont donc de spin 1, ou dit autrement forment la base d'un espace des états de spin 1, au sens quantique du terme. La combinaison antisymétrique est de spin 0; c'est un scalaire sous les rotations[23]. Or c'est un scalaire à deux indices puisque ses coordonnées sont (à $\sqrt{2}$ près) $Y_\alpha Z_\beta - Y_\beta Z_\alpha$! Mais on connaît un tel tenseur à deux indices qui est invariant : c'est le tenseur antisymétrique ϵ. Comme on a vu qu'il n'y a qu'un tenseur invariant, à un facteur près, on déduit que $Y_\alpha Z_\beta - Y_\beta Z_\alpha$ doit être proportionnel à ϵ. Dans le cas de $SU(2)$ c'est matriciellemnt évident puisque la matrice $Y_\alpha Z_\beta - Y_\beta Z_\alpha$ vaut

$$Y_\alpha Z_\beta - Y_\beta Z_\alpha = \begin{pmatrix} & Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1 \\ Y_2 Z_1 - Y_1 Z_2 & \end{pmatrix} = (Y_2 Z_1 - Y_1 Z_2)\epsilon_{\alpha\beta} \tag{II_84}$$

On voit donc que dans le produit de deux spineurs $Y_\alpha Z_\beta$ la combinaison symétrique est de spin 1 (vecteur) et la combinaison antisymétrique de spin 0 (scalaire). On note :

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1 \tag{II_85}$$

où les chiffres représentent les dimensions des représentations que l'on compose. On pourrait poursuivre cette voie et composer un moment angulaire j_1 avec un autre moment $j_2 \leq j_1$. Rappelons ici seulement le résultat :

$$D^{j_1} \otimes D^{j_2} = D^{(j_1+j_2)} \oplus D^{(j_1+j_2-1)} \oplus \ldots \oplus D^{(j_1-j_2)} \tag{II_86}$$

On pourrait aussi composer plus de deux représentations irréductibles ensemble. Il existe une technique diagrammatique classique, très commode, les diagrammes d'Young, pour trouver la décomposition en représentations irréductibles d'un produit tensoriel de représentations. Nous ne l'exposerons pas ici car elle ne sera pas essentielle dans ce qui suivra.

22. C'est la raison pour laquelle on note aussi ces vecteurs respectivement $|1,1\rangle, |1,-1\rangle, |1,0\rangle$. On dit qu'il s'agit du triplet symétrique.

23. Dans ce cas où $W_{\alpha\beta} = Y_\alpha Z_\beta$, on associe à cette matrice 2×2 un vecteur à trois composantes et un scalaire.

CHAPITRE 3

Théorie quantique et symétries

"Il fallait savoir à tout prix, même au prix de la plus grande souffrance.
J'ai pris, j'ai ouvert le couteau à ouvrir les yeux."
H. Michaux

I LES AXIOMES DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Et d'abord quelques généralités pas forcément inutiles à "rappeler".

• **Il n'y a qu'une théorie quantique** avec ses axiomes de base et *plusieurs modèles* s'appuyant sur cette théorie (pas de première ni de seconde quantification [1]).

Exemple : le modèle à une particule libre, invariant galiléen. L'espace des états est un espace de Hilbert dans lequel agissent trois opérateurs fondamentaux (qui forment un ensemble irréductible, voir la suite) $\vec{X}, \vec{P}, \vec{S}$: les opérateurs position, impulsion et spin. Toutes les autres grandeurs physiques sont représentées par des opérateurs qui sont des fonctions de ces trois (ou plutôt neuf) là. Les quantités mesurables sont des éléments de matrice d'opérateurs : $\langle\psi|A|\psi\rangle$ où $A = A(\vec{X}, \vec{P}, \vec{S})$. L'invariance galiléenne impose les relations de commutation usuelles entre les opérateurs $\vec{X}$ et $\vec{P}$: $[X_i, P_j] = i\delta_{ij}\mathbb{1}$ (voir la suite); $\vec{S}$ commute avec $\vec{X}$ et $\vec{P}$. La dynamique du système est donnée par l'hamiltonien du système qui est aussi le générateur des translations dans le temps. Sa forme est elle aussi fixée par l'invariance galiléenne : $H = \vec{P}^2/2m$.

• Les ingrédients nécessaires pour avoir une modèle quantique complètement défini sont

1) un ensemble *irréductible* d'opérateurs hermitiens. Par irréductible, on veut dire qu'il est minimal et qu'il n'existe pas d'opérateurs commutant avec tous les opérateurs de l'ensemble irréductible, à part l'unité [2]. Toutes les "observables" peuvent être construites à partir de ces opérateurs. $\vec{X}, \vec{P}, \vec{S}$ forme l'ensemble irréductible pour la particule à spin.

1. L'histoire de l'expression "seconde quantification" est tortueuse et vient de ce que l'on a cru un moment que la théorie des champs consistait à "quantifier la fonction d'onde" en la prenant comme un opérateur. Aujourd'hui, cette expression est encore employée (on se demande pourquoi) pour signifier que l'on emploie un formalisme d'opérateurs de création et d'annihilation.

2. Attention, il ne faut pas confondre ensemble irréductible d'opérateurs et ensemble complet d'opérateurs commutants. Les opérateurs de l'ensemble irréductible ne commutent pas en général entre eux ($\vec{X}$ et $\vec{P}$ par exemple).

2) un espace de Hilbert qui est l'espace des états du système. L'hypothèse d'irréductibilité implique que l'espace de Hilbert est engendré — et donc défini — par les kets propres de l'ensemble maximal d'opérateurs (de l'ensemble irréductible) commutant, i.e. simultanément diagonalisables. Ces kets sont donc entièrement repérés par les valeurs propres de ces opérateurs (aucun nombre quantique supplémentaire n'est nécessaire pour les repérer)[3]. Les états d'un système quantique sont représentés par les rayons normés de l'espace des états, un rayon étant défini comme l'ensemble des vecteurs $a|\psi\rangle$ quand a décrit $\mathbb{C}$ et un rayon normé comme l'ensemble des vecteurs normés $a|\psi\rangle$ avec $|\psi\rangle$ normé et donc $|a| = 1$. L'ensemble des états physiquement accessibles est supposé engendrer l'espace de Hilbert. Réciproquement, tous les vecteurs de l'espace de Hilbert ne sont pas obligatoirement des états physiquement acceptables : par exemple pour un ensemble de particules chargées, la combinaison linéaire d'états de charges différentes n'est pas physique (sinon, avec une probabilité non nulle, on pourrait, lors de mesures, trouver des charges différentes pour le même système, ce qui n'a jamais été observé et est formalisé sous le nom de principe de conservation de la charge). On dit pour cette raison qu'il y a des opérateurs définissant des règles de super - sélection qui interdisent de former certaines des combinaisons linéaires d'états. L'espace de Hilbert est donc en général la somme directe de sous espaces, dits sous espaces cohérents, repérés par des nombres quantiques bien définis — les valeurs propres des opérateurs de super - sélection —, la charge par exemple, et tels que les grandeurs physiques ont des éléments de matrice nuls entre des états appartenant à deux sous espaces cohérents différents.

3) des relations de commutation entre les opérateurs fondamentaux. Comme on le verra, ces relations de commutation sont en fait déterminées par le groupe de symétrie de l'espace - temps choisi : Galilée ou Poincaré. *L'espace de Hilbert et les opérateurs de l'ensemble irréductible sont entièrement caractérisés par la donnée de toutes les relations algébriques entre ces opérateurs.*

4) un hamiltonien qui détermine l'évolution temporelle du système[4]. Cet hamiltonien doit avoir un spectre borné par en bas pour être admissible (condition de stabilité). L'état fondamental de cet hamiltonien (appelé le vide) joue un rôle particulièrement important.

---

3. Il pourrait paraître curieux de parler d'opérateurs avant de parler de l'espace dans lequel agissent ces opérateurs. Il n'en est en fait rien car un modèle quantique repose bel et bien du point physique sur la donnée d'un certain nombre de grandeurs physiques — d'opérateurs hermitiens — et de l'hypothèse "d'irréductibilité" de cet ensemble d'opérateurs, les deux déterminant la structure du Hilbert.

4. En fait le postulat fondamental de la mécanique quantique est que l'évolution dans le temps des vecteurs d'états $|\phi(t)\rangle$ et $|\psi(t)\rangle$ conserve la probabilité $|\langle\phi(t)|\psi(t)\rangle|$ au cours du temps : $|\langle\phi(t)|\psi(t)\rangle| = |\langle\phi(t_0)|\psi(t_0)\rangle|$. Comme on le verra avec le théorème de Wigner, cette relation implique l'existence d'un opérateur unitaire $T(t, t_0)$ appelé ***opérateur d'évolution***, tel que $|\psi(t)\rangle = T(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$. L'hamiltonien H du système est relié à T par $T(t_0 + dt, t_0) = \mathbf{1} - iH(t_0)dt$ ou encore, pour une évolution finie et un hamiltonien indépendant du temps, $T(t, t_0) = \exp(-iH(t - t_0))$. L'équation de Schrödinger se déduit immédiatement de cette relation.

• Tous les résultats d'une mesure sont évidemment indépendants du choix du représentant dans le rayon. $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$ représente la probabilité de trouver dans une mesure l'état $|\phi\rangle$ sachant que le système était dans l'état $|\psi\rangle$.

• La "mécanique quantique" n'est rien d'autre que la théorie quantique galiléenne.

II LES DIFFÉRENTS POINTS DE VUE ACTIF ET PASSIF

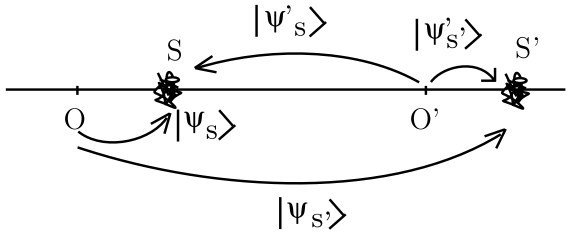

FIG. 3.1 - *Premier point de vue actif dans le cas d'une translation. Les conventions sont telles que, par exemple, on appelle $|\psi_{S'}\rangle$ le ket attribué par $\mathcal{O}$ au système S' et $|\psi'{}_{S'}\rangle = U|\psi_{S'}\rangle$ celui attribué par $\mathcal{O}'$ au même système, U faisant le passage entre $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$*

En fait, il n'y a pas que deux points de vue, l'actif et le passif, mais bien quatre (voir l'Appendice IV).

1) *Le point de vue passif.* Dans ce point de vue, on a deux observateurs $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ transformés l'un de l'autre et un seul système. On a donc une seule réalité objective et deux descriptions différentes de cette réalité. On dira qu'il existe une transformation de symétrie (translation, rotation, transformation de Galilée ou de Lorentz, inversion, etc. . .) si les lois écrites par $\mathcal{O}$ sont identiques à celles écrites par $\mathcal{O}'$.

2) *Le premier point de vue actif.* Dans ce point de vue, on a deux observateurs $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ transformés l'un de l'autre et deux systèmes identiques S et S' qui sont tels que *initialement*, à un instant t_0, $\mathcal{O}$ est relié à S de la même façon que $\mathcal{O}'$ est relié à S' (par exemple Juliette fait la même expérience à Grenoble que Tatiana à Moscou). On dira dans ce point de vue qu'il y a symétrie entre $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ si les résultats de toutes les mesures faites par $\mathcal{O}$ sur S sont identiques à ceux obtenus dans les mêmes mesures effectuées par $\mathcal{O}'$ sur S'.

3) *Le deuxième point de vue actif.* Dans ce point de vue, on a un seul observateur et deux systèmes S et S' transformés l'un de l'autre. Les appareils de mesure servant à étudier chacun des systèmes sont eux mêmes transformés de la même manière que les systèmes. Là aussi, on dira qu'il y a symétrie entre les systèmes si les mêmes mesures effectuées sur les deux systèmes donnent les mêmes résultats.

3) *Le point de vue ni actif ni passif.* Ce point de vue ne permet pas directement de mettre en œuvre un principe de relativité mais il est très utilisé pour des raisons pratiques. Il consiste à prendre un seul observateur et un seul système et à transformer les appareils de mesure.

III TRANSFORMATIONS INDUITES DANS L'ESPACE DES ÉTATS - THÉORÈME DE WIGNER

On va se placer dans cette partie dans le point de vue passif. Pour fixer les idées, supposons que les deux observateurs $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ soient déplacés l'un par rapport à l'autre par une translation d'une quantité fixée $\vec{a} = \vec{\mathcal{O}\mathcal{O}'}$ et qu'ils cherchent à décrire le même système quantique. Comment passer de la description de l'un à celle de l'autre?

Attention, contrairement à une vitesse, une force, etc... un vecteur dans l'espace des états n'est pas directement "observable". *Par conséquent, même dans le point de vue passif, rien n'interdit que deux observateurs décrivant un même système attribuent des vecteurs d'état différents à ce système*, contrairement au cas classique, voir Eq.(I_1) du chapitre 2.[5].

En fait, la seule restriction quant à leur choix est que les quantités mesurables, comme par exemple un taux de comptage dans un détecteur, soient identiques dans leurs deux descriptions, aux mesures reliées à la position près. Ainsi, si les deux observateurs $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ attachent à un état du système respectivement les kets (normés) $|\psi(t)\rangle$ et $|\psi'(t)\rangle$ et cherchent à mesurer respectivement $|\langle\phi(t)|\psi(t)\rangle|$ et $|\langle\phi'(t)|\psi'(t)\rangle|$ où $|\phi(t)\rangle$ et $|\phi'(t)\rangle$ représentent un autre état du système vu par chacun des observateurs, on doit avoir :

$$|\langle\phi(t)|\psi(t)\rangle| = |\langle\phi'(t)|\psi'(t)\rangle| \qquad \text{(III\_1)}$$

Un théorème dû à Wigner montre que si cette condition est remplie, alors il existe un opérateur U agissant dans l'espace de Hilbert[6] qui est soit linéaire et unitaire soit anti-linéaire et unitaire et qui envoie $|\phi\rangle$ et $|\psi\rangle$ sur $|\phi'\rangle$ et $|\psi'\rangle$[7] :

$$\boxed{|\langle\phi|\psi\rangle| = |\langle\phi'|\psi'\rangle| \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} |\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \\ |\phi'\rangle = U\,|\phi\rangle \end{array} \right.} \qquad \text{(III\_2)}$$

5. C'est même obligatoire si $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ ont choisi le même opérateur position, car le ket d'état possédant, dans ce cas, toute l'information sur la position du système, et cette position n'étant pas la même relativement aux deux repères, les vecteurs d'état doivent être différents (voir la suite)

6. En général, U dépend explicitement des repères liés à $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ et pas seulement de la transformation faisant passer de $\mathcal{O}$ à $\mathcal{O}'$. Que l'on pense à une translation dans le temps pour un système dont l'hamiltonien dépend explicitement du temps (présence d'un champ extérieur variable par exemple). Par contre, lorsque la transformation considérée est une symétrie, alors seule la "position" relative des deux observateurs importe et U ne dépend plus alors que de la transformation faisant passer de $\mathcal{O}$ à $\mathcal{O}'$. Dans le cas d'une translation $U = U(\vec{a})$ où $\vec{a} = \vec{\mathcal{O}\mathcal{O}}'$.

7. En fait, l'équation (III_1) définit une relation entre rayons et non entre kets puisque les phases de ces kets n'y jouent aucun rôle. Voir l'encadré IV.

Dans tout ce qui suit, sauf pour le renversement du temps, il est facile de se convaincre que seuls les opérateurs unitaires jouent un rôle (c'est en fait évident pour les symétries continues car on peut alors passer continûment de l'unité à n'importe quel élément du groupe).

Supposons maintenant, pour le cas des translations où $U = U(\vec{a})$, un troisième observateur $\mathcal{O}''$ déplacé de $\vec{b}$ par rapport au second et qui lui aussi décrit le même système. On peut bien entendu recommencer le même raisonnement avec le même résultat :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} |\psi''\rangle & = & U(\vec{b})|\psi'\rangle \\ |\phi''\rangle & = & U(\vec{b})|\phi'\rangle \end{array} \right. \tag{III\_3}$$

Mais bien entendu, $\mathcal{O}''$ est translaté de $\vec{a}+\vec{b}$ par rapport à $\mathcal{O}$ et on peut donc encore recommencer le même raisonnement avec comme résultat [8] :

$$|\psi''\rangle = U(\vec{a}+\vec{b})|\psi\rangle = U(\vec{b})U(\vec{a})|\psi\rangle \tag{III\_4}$$

et donc

$$U(\vec{a}+\vec{b}) = U(\vec{b})U(\vec{a}) \tag{III\_5}$$

Les U forment donc une représentation du groupe des translations, ou, dit autrement, les états de l'espace de Hilbert engendrent une représentation du groupe des translations (et idem pour les rotations et Lorentz). On voit ici toute l'importance de la structure linéaire – espace de Hilbert, opérateurs linéaires, etc. . . , – qui est à la base de la mécanique quantique : elle fournit un espace de représentation pour les groupes de symétrie [9]. Ceci vaut évidemment aussi pour le groupe des rotations et le groupe de Lorentz.

Si $\vec{a} = \vec{0}$, les deux observateurs sont confondus et on veut donc que $U(\vec{0}) = \mathbb{1}$. Pour une transformation infinitésimale, U doit donc être voisin de $\mathbb{1}$ si bien que l'on peut écrire :

$$U(d\vec{a}) = \mathbb{1} - i\vec{P}\,.\,d\vec{a} \tag{III\_6}$$

ce qui définit $\vec{P}$ comme le générateur des translations dans l'espace de Hilbert ($\vec{P}$ est hermitique puisque U est unitaire). Le signe moins est là pour retrouver les conventions de signe habituelles. En répétant le raisonnement de la page 24, on déduit que pour une transformation finie :

$$U(\vec{a}) = e^{-i\vec{P}\,.\,\vec{a}} \tag{III\_7}$$

On peut établir une équation analogue pour les rotations :

$$U(\vec{\theta}) = e^{i\vec{J}\,.\,\vec{\theta}} \tag{III\_8}$$

8. Il y a un arbitraire de phase dans toutes ces relations. Voir l'encadré IV.

9. On remarquera que pour les transformations de Lorentz où le raisonnement est identique, on obtient ainsi une représentation unitaire pour ce groupe non compact, ce qui n'est possible que parce que l'espace de Hilbert est de dimension infinie, voir l'encadré III.

IV. Représentations projectives — Spin 1/2

La relation (III.4) n'est "pas tout à fait exacte". En effet $U(\vec{a}+\vec{b})|\psi\rangle$ et $U(\vec{b})U(\vec{a})|\psi\rangle$ décrivent bien tous les deux le même état physique et doivent donc appartenir au même rayon, i.e. être égaux à une phase près. On en déduit donc en général

$$U(g_1)\,U(g_2) = e^{i\alpha(g_1,g_2)}U(g_1g_2)$$

où $g_{1,2}$ sont des éléments d'un groupe de transformation G. On dit pour cette raison que les U fournissent une représentation à une phase près — dite aussi représentation projective — du groupe G dans l'espace des états. Et là intervient un théorème extraordinaire, valable dans les cas qui nous intéresseront, c'est à dire le groupe des rotations et le groupe de Lorentz :

"*Toute représentation à une phase près, continue, unitaire de $SO(3)$ est une représentation vraie de son groupe de recouvrement universel $SU(2)$.*"

Ceci signifie deux choses :
1) Sans changer le contenu physique de la théorie, on peut toujours se ramener pour $SO(3)$ à des représentations vraies — et donc ignorer les phases — à condition de prendre les représentations de $SU(2)$ (il en sera ainsi également pour le groupe de Lorentz et en général pour tous les groupes de symétrie auquel nous aurons affaire).

2) Les représentations de $SO(3)$ ne diffèrent de celles de $SU(2)$ qu'en ce qui concerne le "spin" de la représentation. Pour $SO(3)$, j est entier alors que pour $SU(2)$, j est entier ou demi entier. Ceci signifie *qu'en mécanique quantique* bien que l'espace de base soit euclidien et ait donc $SO(3)$ et non $SU(2)$ comme sous groupe du groupe d'isométrie (les repères sont des objets classiques qui se transforment par $SO(3)$), les états engendrent en fait des représentations de $SU(2)$ lors des rotations dans l'espace de base. Ceci permet l'existence de représentations de spin 1/2 que la Nature utilise effectivement et qui n'ont pas d'analogue classique. Remarquons toute l'importance du choix des axiomes de la mécanique quantique : la notion d'espace de Hilbert, bâti sur les complexes et de dimension infinie conduit au théorème de Wigner, autorise des représentations unitaires même pour les groupes non compacts (Lorentz), fournit un espace pour les représentations à une phase (complexe) près et par conséquent autorise la notion même de spin demi entier...

où les J_i sont les générateurs du groupe des rotations dans l'espace de Hilbert [10]. Un résultat identique sera établi plus tard pour les transformations de Lorentz.

10. Par manque de symboles, nous noterons génériquement $\vec{J}$ le générateur des rotations, indépendamment de la représentation, i.e. de la valeur de j.

IV POINT DE VUE PASSIF – TRANSFORMATIONS DES OBSERVABLES – SYMÉTRIES

On a donc deux observateurs $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ transformés l'un de l'autre et un seul système. Supposons que l'on connaisse l'opérateur U qui transforme le ket $|\psi\rangle$ attribué au système par l'observateur $\mathcal{O}$, en $|\psi'\rangle$ le ket attribué par $\mathcal{O}'$ au même système, (Eq.(III.2) pour le cas des translations). Comment se transforment alors les observables dans le passage d'un observateur à l'autre?

Ce que l'on a vu dans le cas classique c'est que, par exemple pour un vecteur $\vec{V}$ et pour le groupe des rotations

$$V'_i = \left[R(\vec{\theta})\right]_i^{\ j} V_j \tag{IV.9}$$

ce qui, symboliquement, se généralise à n'importe quel objet tensoriel ou spinoriel engendrant la représentation $\{M\}$ de $SU(2)$

$$T'_\alpha = \left[M(\vec{\theta})\right]_\alpha^{\ \beta} T_\beta \tag{IV.10}$$

où α et β représentent un ou des indices vectoriels, spinoriels ou tensoriels et M une ou des matrices de $SU(2)$, $SO(3)$, etc... (s'il y a plusieurs indices, on a une matrice de transformation par indice).

L'idée naturelle pour généraliser cette loi de transformation est de supposer que ce qui est vrai en classique l'est en quantique pour les valeurs moyennes. Nous posons donc :

$$\boxed{\Big(\langle\psi|T_\alpha|\psi\rangle\Big)' = M_\alpha^{\ \beta}\,\langle\psi|T_\beta|\psi\rangle} \tag{IV.11}$$

Ceci est la véritable — ou en tout cas la nôtre — expression du "principe de correspondance". En posant (IV.11) comme un des fondements de la théorie quantique, on espère évidemment poser les bons axiomes qui permettront de retrouver les théories classiques comme des limites des théories quantiques.

On peut évidemment, et comme d'habitude en quantique, changer les kets et garder fixes les opérateurs ou le contraire (ou même un mélange des deux). On choisit ici de *changer les états en gardant fixes les opérateurs* :

$$\begin{cases} |\psi'(t)\rangle = U(\vec{\theta},t)|\psi(t)\rangle \\ \langle\psi'|T_\alpha|\psi'\rangle = M(\vec{\theta})_\alpha^{\ \beta}\,\langle\psi|T_\beta|\psi\rangle \end{cases} \tag{IV.12}$$

où $U(\vec{\theta}, t)$ est l'opérateur unitaire représentant dans l'espace de Hilbert la rotation d'angle $\vec{\theta}$ et où il s'agit bien du même T dans les deux membres de l'équation. La deuxième relation implique que U vérifie[11]

$$\boxed{U^\dagger T_\alpha U = M_\alpha{}^\beta T_\beta} \tag{IV\_13}$$

Remarquons que pour les translations, la transformation classique de la position ne consiste pas en une transformation matricielle, mais en une transformation affine : $\vec{x} \to \vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{a}$. On choisit donc pour la transformation quantique de la position :

$$\langle\psi'|\vec{X}|\psi'\rangle = \langle\psi|\vec{X}|\psi\rangle + \vec{a}. \tag{IV\_14}$$

ce qui entraîne

$$U(\vec{a})^\dagger\, X_i\, U(\vec{a}) = X_i + a_i. \tag{IV\_15}$$

Dans une rotation, l'équation (IV_13) devient pour l'opérateur position

$$U(\vec{\theta})^\dagger\, X_i\, U(\vec{\theta}) = R_i{}^j X_j. \tag{IV\_16}$$

et dans l'action successive d'une rotation et d'une translation :

$$\boxed{U(\vec{\theta}, \vec{a})^\dagger\, X_i\, U(\vec{\theta}, \vec{a}) = R(\vec{\theta})_i{}^j X_j + a_i} \tag{IV\_17}$$

Toutes ces relations doivent être interprétées comme des *contraintes que doivent satisfaire les U et qui en fait les déterminent*[12].

Attention, U, T, X_i etc... sont des opérateurs dans l'espace de Hilbert alors que les M, R et $\vec{a}$ agissent sur les valeurs moyennes. Les M et les U forment des représentations des groupes de symétrie pour respectivement les tenseurs "classiques" et les états quantiques.

A Symétries en représentation de Schrödinger

Voyons maintenant ce qu'il en est de la notion de symétrie dans le point de vue passif et en représentation de Schrödinger. Tout ce qui va suivre va consister à formaliser la notion simple suivante. Pour passer de $|\psi(t_0)\rangle$ à $|\psi'(t)\rangle$, on peut soit transformer $|\psi(t_0)\rangle$ en $|\psi'(t_0)\rangle$ grâce à $U(t_0)$ puis laisser évoluer ce ket jusqu'à t, soit laisser évoluer $|\psi(t_0)\rangle$ jusqu'à t en $|\psi(t)\rangle$ et le

11. Le fait que l'égalité des valeurs moyennes entraîne l'égalité des opérateurs est une conséquence du fait que l'on travaille dans un espace de Hilbert (métrique positive). Voilà une bonne raison supplémentaire pour adopter cette structure et travailler sur les complexes.

12. Pour entièrement déterminer un opérateur U, on doit connaître l'analogue de la relation (IV_17) pour chacun des opérateurs de l'ensemble irréductible. C'est là qu'intervient tout l'intérêt de cette notion d'irréductibilité.

transformer en $|\psi'(t)\rangle$ grâce à $U(t)$. Lorsque U représente une symétrie, ces deux opérations commutent et, comme nous allons le voir, ceci impose la contrainte suivante sur l'hamiltonien H du système et donc sur sa dynamique[13] :

$$[H, U] = 0$$

Montrons maintenant la preuve de ce résultat.

Nous allons dans un premier temps travailler en représentation de Schrödinger où ce sont les états qui évoluent dans le temps et les opérateurs qui sont indépendants du temps. On a besoin pour formaliser la notion de symétrie d'établir la relation entre les opérateurs d'évolution dans le temps $T(t,t')$ et $T'(t,t')$ utilisés par chacun des deux observateurs. Dans toute la suite, on appellera $U(t)$ l'opérateur de Wigner faisant passer des kets utilisés par l'observateur $\mathcal{O}$ à ceux utilisés par $\mathcal{O}'$ pour décrire le même système (point de vue passif). On a par définition :

$$\begin{cases} |\psi'(t)\rangle = T'(t,t_0)|\psi'(t_0)\rangle = T'(t,t_0)U(t_0)|\psi(t_0)\rangle \\ \\ |\psi'(t)\rangle = U(t)|\psi(t)\rangle = U(t)T(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle \end{cases} \tag{IV.18}$$

d'où l'on déduit la relation générale entre opérateurs d'évolution :

$$T'(t,t_0)U(t_0) = U(t)T(t,t_0) \tag{IV.19}$$

On voit donc que, contrairement aux observables de l'ensemble irréductible, les opérateurs d'évolution dans le temps changent en général d'un observateur à l'autre. Cependant, lorsque la transformation considérée est une symétrie, les lois d'évolution doivent par définition être identiques pour les deux observateurs et par conséquent les opérateurs d'évolution doivent être les mêmes. Ceci implique donc, compte tenu de la relation précédente :

$$\boxed{T(t,t_0)U(t_0) = U(t)T(t,t_0)} \tag{IV.20}$$

pour tout t (et t_0). Ceci constitue, dans la représentation de Schrödinger, la condition pour que le passage de $\mathcal{O}$ à $\mathcal{O}'$ soit une symétrie. Il est intéressant de réexprimer cette condition en fonction de l'hamiltonien du système. Dire que les deux observateurs écrivent les mêmes lois dynamiques, c'est dire qu'ils ont le même opérateur d'évolution et écrivent donc la même équation de Schrödinger. Ils ont donc le même hamiltonien (même T donc même H):

$$H(t) = H'(t) \tag{IV.21}$$

13. Cette relation n'est en fait vraie que dans le cas où U est indépendant du temps, voir l'Eq.(IV.24).

Multiplions à gauche par $U(t)$, que l'on supposera unitaire dans toute la suite, l'équation de Schrödinger écrite par $\mathcal{O}$:

$$iU(t)\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \Big(U(t)H(t)U^\dagger(t)\Big)U(t)|\psi(t)\rangle \tag{IV -22}$$

En comparant cette équation à celle écrite par $\mathcal{O}'$ on déduit (le vérifier) :

$$H'(t) = H(t) = U(t)H(t)U^\dagger(t) + i\frac{\partial U(t)}{\partial t}U^\dagger(t) \tag{IV -23}$$

ou de façon équivalente compte tenu de (IV -21)

$$\boxed{[H(t), U(t)] + i\frac{\partial U(t)}{\partial t} = 0} \tag{IV -24}$$

Si, comme ce sera souvent le cas, U est indépendant du temps, alors la condition (IV -20) pour que U représente une symétrie devient :

$$[H(t), U] = 0 \tag{IV -25}$$

Tous les U sont par conséquent des constantes du mouvement (voir aussi (IV -30)). Pour autant, lorsque le groupe de symétrie est un groupe de Lie, on n'obtient pas ainsi une infinité de constantes du mouvement *indépendantes*. En fait, on voit sur la relation précédente, en développant U au premier ordre, que seuls les *générateurs sont des constantes du mouvement indépendantes* lorsqu'on a une symétrie (le faire). Etant de plus hermitiques, contrairement aux U, ce sont de bons candidats pour jouer le rôle de grandeurs physiques. Comme on le verra dans la suite, c'est le cas de l'impulsion pour un système invariant par translation, du moment cinétique pour un système invariant par rotation, etc...

Dans le cas où le système étudié possède des symétries, on peut chercher les états propres de H qui sont également états propres de l'ensemble maximal des générateurs qui commutent entre eux et avec H. Ceci peut considérablement simplifier la recherche des états propres en pratique (par exemple pour des systèmes sur réseau où l'on effectue sur ordinateur des diagonalisations exactes d'hamiltoniens et où une analyse fine des symétries du système peut s'avérer cruciale).

L'ensemble des relations de commutation (IV -25) — une pour chaque symétrie — n'impose des contraintes sur la forme que peut prendre l'hamiltonien du système que parce que H et U sont des fonctions des *mêmes* opérateurs de l'ensemble irréductible. Plus il y a de quantités conservées, plus la dynamique est contrainte. Comme il était annoncé dans les premières pages d'introduction de ce cours, ceci déterminera, en dernier ressort, presque entièrement la forme des théories, i.e. des hamiltoniens, que nous construirons[14].

14. En fait, techniquement parlant, ce n'est pas cette démarche qui est la plus simple car il devient fort compliqué dans la pratique de trouver, en fonction des opérateurs de l'ensemble irréductible, à la fois les U

Pour les systèmes conservatifs, ceci fournit des *règles de sélection* car (le montrer)

$$\langle u_1|H|u_2\rangle = 0 \quad \text{pour des valeurs propres } u_1 \neq u_2 \tag{IV-26}$$

lorsque $|u_{1,2}\rangle$ sont des vecteurs propres de U. Ceci fournit également des renseignements sur la dégénérescence des niveaux d'énergie : si $|E\rangle$ est vecteur propre de H alors $U|E\rangle$ l'est aussi avec la même énergie (le montrer). Si ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels alors le niveau est dégénéré au moins deux fois. *Pour un niveau dégénéré, l'ensemble des vecteurs normés de ce niveau engendre une représentation irréductible du groupe de symétrie de la théorie.* On voit donc que dégénérescence et symétrie sont liées et donc, souvent plus important en pratique, levée de dégénérescence et perturbation brisant la symétrie (effet Zeeman par exemple).

B Symétries en représentation de Heisenberg

Il est intéressant d'étudier ce qu'il en est de la notion de symétrie dans la représentation de Heisenberg car, d'une part, nous allons voir que l'analogue de la condition (IV-20) est plus simple dans cette représentation et, d'autre part, la représentation de Heisenberg est mieux adaptée à la théorie des champs que la représentation de Schrödinger.

Rappelons d'abord que le passage de Schrödinger à Heisenberg s'effectue en posant, dans des notations évidentes :

$$\langle\psi^H|A^H(t)|\psi^H\rangle = \langle\psi^S(t)|A^S|\psi^S(t)\rangle \tag{IV-27}$$

d'où l'on déduit la correspondance

$$\left\{\begin{array}{l} |\psi^H\rangle = T^\dagger(t,t_0)\,|\psi^S(t)\rangle \\ \\ A^H(t) = T^\dagger(t,t_0)\,A^S\,T(t,t_0) \end{array}\right. \tag{IV-28}$$

où t_0 est un instant arbitrairement choisi où les deux représentations coïncident.

Appelons U l'opérateur de Wigner faisant passer de $\mathcal{O}$ à $\mathcal{O}'$. Il est clair que pour chaque observateur, on peut se servir de la représentation de Heisenberg mais il n'est pas évident dans cette représentation que les deux observateurs puissent prendre les mêmes opérateurs à tout instant. En fait, comme d'une part, nous avons choisi de prendre identiques les opérateurs de l'ensemble irréductible pour $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ dans la représentation de Schrödinger, Eq.(IV-12), et, comme d'autre part, si U est une symétrie, les opérateurs d'évolution sont identiques, nous déduisons qu'en représentation de Heisenberg, tout opérateur A de l'ensemble irréductible doit

et les hamiltoniens symétriques commutant avec les U (surtout en théorie des champs). C'est la raison qui nous poussera à formuler toute la théorie des champs *grâce au principe de moindre action* — et à partir du lagrangien et non de l'hamiltonien — car dans cette formulation nous pourrons obtenir automatiquement des théories invariantes sous n'importe quel groupe de symétrie.

vérifier :

$$\boxed{A^H(t) = A'^H(t)} \qquad \forall t \tag{IV\_29}$$

pour que U soit une symétrie.

Ajoutons qu'en représentation de Heisenberg, la relation (IV_20) a une interprétation très simple car $U(t_0) = T^\dagger(t,t_0)U(t)T(t,t_0)$ est équivalent à $U^H(t_0) = U^H(t)$ et cette relation exprime donc le fait que l'opérateur U^H est indépendant du temps. Dit autrement, pour une symétrie :

$$\frac{dU^H(t)}{dt} = 0 \qquad \text{pour une symétrie} \tag{IV\_30}$$

C'est donc une constante du mouvement [15].

En résumé, on voit que les deux relations (IV_29), (IV_30) signifient que :

En représentation de Heisenberg, lorsqu'il s'agit d'une symétrie, l'opérateur U de Wigner est indépendant du temps et les deux observateurs utilisent les mêmes opérateurs pour une grandeur physique donnée, comme dans le cas de la représentation de Schrödinger.

Appliquons maintenant tout ceci à un cas simple.

C Le modèle de la particule à spin

Nous allons illustrer ce qui précède sur le modèle galiléen à une particule. Par définition, notre modèle suppose l'existence d'un opérateur position $\vec{X}$ pour la "particule" [16]. Bien sûr, pour que la notion de position ait un sens, il faut que les valeurs moyennes de $\vec{X}$ se transforment conformément à (IV_14) dans une translation du repère (et que les différentes composantes de $\vec{X}$ commutent entre elles). Ceci implique qu'il existe un opérateur $U_t(\vec{a})$, fonction des opérateurs de l'ensemble irréductible, tel que (IV_15) soit vérifiée. Cette exigence est incompatible avec le fait que l'ensemble irréductible ne contienne que $\vec{X}$ car

$$U^\dagger(\vec{X},\vec{a})\ X_i\ U(\vec{X},\vec{a}) = X_i$$

15. Rappelons que les U étant des opérateurs dans l'espace de Hilbert sont des fonctions des opérateurs de l'ensemble irréductible.

16. Nous verrons que la construction du modèle des particules libres, dans le cas relativiste de Lorentz, repose sur des hypothèses assez différentes et, d'ailleurs, moins contraignantes puisqu'on ne fait justement pas l'hypothèse de l'existence de particules, mais (presque) seulement de l'invariance de Lorentz et des postulats quantiques. On y gagnera en généralité, mais on y perdra un peu quant au contenu intuitif.

pour tout $U(\vec{X}, \vec{a})$. Nous sommes donc amenés à construire un autre opérateur, $\vec{P}$, générateur des translations, tel que (IV-15) soit vérifiée. On a alors par définition :

$$U_t(\vec{a}) = e^{-i\vec{P}\,.\,\vec{a}} \tag{IV-31}$$

On appelle impulsion l'opérateur $\vec{P}$. Les relations de commutation entre $\vec{X}$ et $\vec{P}$ sont fixées par (IV-15). En effet, en développant au premier ordre cette relation, on obtient (à une dimension) :

$$(\mathbb{1} + iPda)\,X\,(\mathbb{1} - iPda) = X + da \tag{IV-32}$$

soit :

$$[X, P] = i \tag{IV-33}$$

C'est donc bien notre "principe de correspondance" qui fixe l'algèbre des opérateurs de l'ensemble irréductible. La soit-disant correspondance entre théories classique et quantique n'existe pas, mis à part l'équation (IV-11). Il n'y a qu'une limite (non triviale) entre les deux, et des symétries communes qui ont historiquement fait croire à une correspondance entre les deux théories ou, pire encore, qui ont fait croire que la théorie quantique se "déduisait" de la théorie classique. Bien sûr, en pratique, on ne connaît la plupart du temps que l'aspect classique d'une théorie. De là, on cherche à induire (et non déduire) la bonne théorie quantique qui redonne à la limite classique la théorie dont on est parti. On cherche donc, en effet, un algorithme qui permette de supputer une théorie quantique à partir d'une théorie classique. Il ne faut pourtant pas en conclure que le chemin entre les deux est univoque.

L'invariance du système sous les translations se traduit par la relation (IV-25) ou par (IV-30), c'est à dire :

$$\left[\vec{P}, H\right] = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\vec{P}^H}{dt} = 0 \tag{IV-34}$$

La première de ces relations signifie qu'en représentation de Schrödinger, si le système est à un certain instant dans un état propre d'impulsion, il le restera. Cela signifie aussi que l'hamiltonien ne peut pas dépendre explicitement de $\vec{X}$.

On souhaiterait évidemment que notre modèle soit aussi invariant sous les rotations. Nous allons choisir comme précédemment que les valeurs moyennes de la position et de l'impulsion se transforment comme des vecteurs classiques :

$$\left\{\begin{array}{l} {U_r}^\dagger(\vec{\theta})\ X_i\ U_r(\vec{\theta}) = R_i^{\ j}\ X_j \\ {U_r}^\dagger(\vec{\theta})\ P_i\ U_r(\vec{\theta}) = R_i^{\ j}\ P_j \end{array}\right. \tag{IV-35}$$

La question se pose donc, de nouveau, de savoir si l'on peut, avec $\vec{X}$ et $\vec{P}$, construire le générateur des rotations ou s'il faut élargir de nouveau l'ensemble irréductible. Il se trouve que l'on peut construire un générateur des rotations à partir de $\vec{X}$ et $\vec{P}$ seuls (le vérifier impérativement) :

$$\vec{L} = \vec{X} \wedge \vec{P} \tag{IV\_36}$$

et l'on a alors :

$$U_r(\vec{\theta}) = e^{i\vec{L}\,.\,\vec{\theta}} \tag{IV\_37}$$

Il y a invariance par rotation lorsque

$$\left[\vec{L}, H\right] = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\vec{L}^H}{dt} = 0 \tag{IV\_38}$$

On devrait maintenant s'intéresser à l'invariance galiléenne, mais, avant d'en venir là, voyons comment le spin peut être naturellement incorporé dans notre modèle. L'idée est que l'on peut difficilement changer ce qui concerne la position dans notre modèle, mais que l'on peut augmenter l'ensemble irréductible, sans rien changer à ce qui précède, en supposant que le générateur complet des rotations, appelé $\vec{J}$ par définition, a certes une partie $\vec{L}$, que nous dénommerons maintenant orbitale, mais également une partie $\vec{S}$, que nous appellerons spin : $\vec{S} = \vec{J} - \vec{L}$. L'ensemble irréductible d'opérateurs est donc supposé être dans ce nouveau modèle : $(\vec{X}, \vec{P}, \vec{S})$. Il est facile d'établir les contraintes que doit vérifier $\vec{S}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} {U_t}^{\dagger}(\vec{a})\ \vec{S}\ U_t(\vec{a}) = \vec{S} \\ \\ {U_r}^{\dagger}(\vec{\theta})\ S_i\ U_r(\vec{\theta}) = {R_i}^j\, S_j \end{array} \right. \tag{IV\_39}$$

On voit qu'en prenant :

$$\left[S_i, X_j\right] = 0 = \left[S_i, P_j\right] \tag{IV\_40}$$

rien n'est à changé pour ce qui est des translations. En prenant de plus, comme il est naturel de le faire :

$$U_r(\vec{\theta}) = e^{i\vec{J}\,.\,\vec{\theta}} \tag{IV\_41}$$

on peut facilement vérifier que tout est cohérent (le faire).

La quantité conservée lorsqu'il y a invariance par rotation est, dans ce cas, $\vec{J}$:

$$\left[\vec{J}, H\right] = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\vec{J}^H}{dt} = 0 \tag{IV\_42}$$

Notre modèle est donc maintenant celui d'une particule qui, en plus de ces degrés de liberté orbitaux, possède une caractéristique supplémentaire, le spin, qui est lié au comportement dans les rotations de la particule. Rien ne nous dit jusqu'à maintenant que la Nature utilise effectivement ce degré de liberté. Pour tester ce modèle, il faudrait construire des modèles d'interaction de ce type de particule avec un environnement et confronter les prédictions théoriques avec les résultats expérimentaux[17].

Passons maintenant à l'invariance galiléenne dans le modèle de la particule sans spin, l'ajout du spin dans ce contexte étant sans intérêt. Supposons que $\mathcal{O}'$ soit en translation rectiligne et uniforme à vitesse $\vec{v}_0$ par rapport à $\mathcal{O}$. Notre principe de correspondance consiste, dans ce cas ci, à supposer l'existence d'un opérateur $U_g(\vec{v}_0)$ permettant de passer de la description de $\mathcal{O}$ à celle de $\mathcal{O}'$ et à imposer (le vérifier impérativement) :

$$\begin{cases} {U_g}^\dagger(\vec{v}_0)\ \vec{X}\ U_g(\vec{v}_0) = \vec{X} - \vec{v}_0 t \\ \\ {U_g}^\dagger(\vec{v}_0)\ \vec{P}\ U_g(\vec{v}_0) = \vec{P} - m\vec{v}_0 \end{cases} \tag{IV\_43}$$

où m est la masse de la particule. On peut montrer que la solution de ces équations est donnée en représentation de Schrödinger par

$$U_g = e^{i\left(\vec{P}t - m\vec{R}\right).\vec{v}_0} \tag{IV\_44}$$

Si la théorie est invariante galiléenne alors on doit avoir en représentation de Heisenberg :

$$\frac{d\left(\vec{P}t - m\vec{R}\right)^H}{dt} = 0 \tag{IV\_45}$$

soit, puisque $\vec{P}^H$ est indépendant de t si la théorie est invariante par translation :

$$\frac{d\vec{R}^H(t)}{dt} = \frac{\vec{P}^H}{m} \tag{IV\_46}$$

ce qui montre que la particule ne peut se déplacer dans ce modèle qu'à vitesse constante. On pourrait encore déduire de ce qui précède que l'énergie se transforme en valeur moyenne comme dans le cas classique lors d'une transformation de Galilée. L'hamiltonien pour la particule libre sans spin qui satisfait à toutes ces contraintes est

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} \tag{IV\_47}$$

17. On sait expérimentalement qu'il existe bien des particules élémentaires qui possèdent un spin, mais, sans que l'on sache complètement pourquoi — on a tout de même des idées là dessus —, on n'a trouvé jusqu'à maintenant que des particules de spin $1/2, 1$ et peut être 2 (le graviton). En fait, on pense qu'il doit exister des particules de spin 0 — le modèle standard électrofaible en prévoit, les particules de Higgs — qu'il existe peut être des particules de spin $3/2$ — les gravitinos prédits par les théories de supergravité — mais qu'il est beaucoup moins sûr qu'il existe des particules de spin supérieur à deux. En effet, les théories invariantes de Lorentz ont du mal à s'accommoder à ces particules dès qu'elles sont en interaction avec d'autres particules (quid des cordes sur ce dernier point ?). Evidemment, pour des systèmes non élémentaires, atomes, noyaux, etc. . . , tous les spins sont permis.

Ce qui donne à m son sens usuel de masse. Tous ces résultats peuvent se généraliser sans difficulté au cas de plusieurs particules. On trouve dans ce cas que ce sont les sommes des impulsions et des moments cinétiques qui sont conservées et que c'est le centre de masse qui se déplace à vitesse uniforme.

D Quelques remarques

Pour finir faisons trois remarques.

• Dans le point de vue passif, pour chaque opérateur B utilisé par $\mathcal{O}$, on peut construire un opérateur B' utilisé par $\mathcal{O}'$ pour décrire *la même mesure* mais dans la description faite par $\mathcal{O}'$. B' est défini par :

$$\langle\psi'|B'|\psi'\rangle = \langle\psi|B|\psi\rangle \quad\Longrightarrow\quad B' = UBU^\dagger \tag{IV\_48}$$

Prenons par exemple la mesure de l'abscisse du système par rapport à $\mathcal{O}$. $B = X$ dans ce cas et $B' = X' = U(\vec{a})\,X\,U^\dagger(\vec{a})$. Dans ce contexte, cet opérateur n'est pas très intéressant car il sert à $\mathcal{O}'$, non pas à mesurer la distance du système par rapport à lui même, mais par rapport à $\mathcal{O}$. Ca n'est donc pas $X' = UXU^\dagger$ qui est intéressant mais bien X. Cet opérateur sert aux deux observateurs à mesurer la distance du système par rapport à leur référentiel respectif (il ne s'agit donc pas de la même quantité, même s'il s'agit du même opérateur).

• Une petite remarque en guise d'avertissement. Pour

$$\vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{a} \tag{IV\_49}$$

on a "évidemment" [18]

$$|\vec{x}\,'\rangle = U(\vec{a})|\vec{x}\rangle = |\vec{x} + \vec{a}\rangle \tag{IV\_50}$$

puisque

$$\langle\vec{x}\,'|\vec{X}|\vec{x}\,'\rangle = \vec{x} + \vec{a} \tag{IV\_51}$$

Pour une fonction d'onde on a donc :

$$\psi'(\vec{x}) = \langle\vec{x}|\psi'\rangle = \langle\vec{x}|U(\vec{a})|\psi\rangle = \psi(\vec{x} - \vec{a}) \tag{IV\_52}$$

car $U^\dagger(\vec{a})|\vec{x}\rangle = U(-\vec{a})|\vec{x}\rangle = |\vec{x} - \vec{a}\rangle$. Le signe moins pourrait paraître bizarre, mais il est en fait tout à fait normal comme la figure 3.2 le montre (même chose pour une rotation où c'est R^{-1} qui intervient dans la fonction d'onde $\psi(R^{-1}\vec{x})$. Le montrer.).

18. En fait, il faut faire attention car les $|\vec{x}\rangle$ n'appartiennent pas au Hilbert. Cette relation est donc plutôt la définition de l'extension de U à ces vecteurs. Cette définition est évidemment faite pour être cohérente avec tous les résultats précédents.

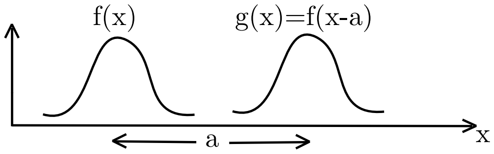

FIG. 3.2 - *Dans une translation de $+a$, la fonction translatée $g(x)$ vaut $f(x-a)$*

• On trouve souvent écrit dans la littérature que comme le hamiltonien détermine la dynamique infinitésimale des systèmes quantiques (équation de Schrödinger), il est le générateur des translations dans le temps. Ceci est faux (mais le résultat est juste). *Il ne faut pas confondre translation dans le temps et dynamique.* Dire que deux expériences sont translatées dans le temps d'une quantité τ, c'est dire que si l'une a démarré à t_0, l'autre a démarré à $t_0+\tau$: il n'y a rien ici de dynamique (cette façon de réaliser une translation dans le temps n'est pas celle du point de vue passif puisqu'il y a deux expériences, mais c'est ici la plus claire). Néanmoins, comme l'évolution dynamique d'un système quantique est telle que $|\langle\phi(t)|\psi(t)\rangle| = |\langle\phi(t_0)|\psi(t_0)\rangle|$, voir la note en bas de page 49, et que ceci est formellement identique à l'équation (III_1), l'opérateur qui, à un temps donné, dans le point de vue passif, réalise le passage entre les kets d'un observateur à ceux de l'autre observateur translaté dans le temps, n'est rien d'autre que l'opérateur d'évolution. L'hamiltonien est donc bien également le générateur des translations dans le temps, mais pour une raison un peu plus subtile que celle en général avancée.

Il serait logique à ce stade de discuter les deux points de vue actif. Cependant, comme aucun résultat nouveau ne sera obtenu dans ces points de vue, il ne s'agit que d'une reformulation, cette discussion est rejetée en Appendice IV. Nous allons au contraire discuter d'un point de vue qui n'est ni passif ni réellement actif et qui nous permettra de définir la notion d'opérateurs tensoriels irréductibles.

V UN POINT DE VUE NI ACTIF NI PASSIF - OPÉRATEURS TENSORIELS

Nous allons nous intéresser à une situation où il n'y a qu'un seul observateur et un seul système et où ce sont les appareils de mesure que l'on transforme. Nous allons étudier comment changent les observables (associées aux appareils de mesure) dans ces transformations[19].

Pour fixer les idées, nous allons considérer les rotations et la mesure de l'observable de spin. Pour un instant, considérons le second point de vue actif où il n'y a qu'un observateur et deux systèmes tournés l'un par rapport à l'autre par une rotation R (voir l'Appendice IV).

19. C'est en fait le second point de vue actif dans lequel on retire le système S' tout en gardant les appareils de mesure qui y étaient attachés.

L'invariance par rotation nous dit que si l'on tourne le système et les appareils de mesure, tous les résultats de mesure sont identiques. Ainsi, si le système S caractérisé par un opérateur de spin $\vec{S}$, est dans l'état propre de $S_z = \vec{S}.\vec{e_z}$ avec valeur propre $+1/2$, le système S', tourné par la rotation R par rapport à S, sera dans l'état propre de $S_{z'} = \vec{S}.\vec{e_z}\,'$, où $\vec{e_z}\,' = R\vec{e_z}$, avec la même valeur propre (on a fait tourner toute l'expérience). Par conséquent, *à système donné*, la relation entre les observables S_z et $S_{z'}$ s'obtient en disant que si l'on tournait le système en même temps que les appareils de mesure, les résultats des deux mesures devraient être identiques :

$$|\langle\psi_{S'}|S_{z'}|\psi_{S'}\rangle| = |\langle\psi_S|S_z|\psi_S\rangle| \tag{V-53}$$

où $|\psi_S\rangle$ représente l'état du système S et $|\psi_{S'}\rangle$ représente l'état qu'aurait le système si on le tournait, par la rotation R, en même temps que les appareils de mesure.

Le passage entre ces deux kets se fait, bien entendu, grâce à un opérateur de Wigner V[20] :

$$|\psi_{S'}\rangle = V|\psi_S\rangle \tag{V-54}$$

On en déduit donc

$$\boxed{S_{z'} = V\,S_z\,V^{-1}} \tag{V-55}$$

Cette relation est bien entendu vraie pour tout opérateur. Ce qui n'est pas général, c'est par contre que :

$$S_{z'} = \vec{S}\,.\,\vec{e_z}\,' = R_{3j}S_{e_j} = V\,\vec{S}\,V^{-1}\,.\,\vec{e_z} \tag{V-56}$$

ou, plus généralement, que :

$$S_{Re_i} = R_{ij}\,S_{e_j} = V\,S_{e_i}\,V^{-1} \tag{V-57}$$

où R est la rotation dans l'espace de base qui amène le vecteur de base $\vec{e_i}$ sur $R\vec{e_i}$[21].

En conclusion, on voit que les opérateurs U (ou V) qui permettent de transformer les états *permettent aussi de transformer les opérateurs.* Les opérateurs qui sont invariants sous cette transformation : $A = U^{-1}AU$ sont dits opérateurs scalaires. Au contraire, les opérateurs qui se transforment comme $\vec{S}$ sont dits vectoriels car ils se transforment comme des vecteurs ordinaires. On peut ainsi définir des opérateurs tensoriels de tout ordre de façon analogue et on peut, à partir de là, démontrer un théorème très important en pratique : le théorème de Wigner-Eckart. Nous n'en dirons pas davantage sur ce théorème car nous n'en aurons pas besoin dans la suite

20. Comme il s'agit d'une rotation active, $V = U^{-1}$ où $U = U(R)$ est l'opérateur défini dans le point de vue passif et qui permettrait de faire le passage entre les kets $|\psi_S\rangle$ attribué par l'observateur $\mathcal{O}$ au système S et $|\psi'_S\rangle$ attribué au même système par l'observateur $\mathcal{O}'$ tourné par rapport à $\mathcal{O}$ par la rotation R. Voir l'appendice IV pour un dessin et davantage d'explications, en particulier l'équation (IV-26). Comparer également avec l'équation (IV-48): ça n'est pas la même chose!

21. On comparera avec intérêt cette relation avec celles données dans les équations (II-41) et (II-42). Ce sont évidemment les mêmes et pour les mêmes raisons bien que dérivées différemment.

de ce cours et que de toute façon on peut en trouver l'énoncé et la démonstration dans la plupart des livres de mécanique quantique.

Pour finir ce chapitre, remarquons qu'il convient de faire particulièrement attention au fait suivant. Nous avons vu que dans une transformation passive où

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \tag{V-58}$$

les valeurs moyennes des opérateurs se transforment par le "principe de correspondance" :

$$\Big(\langle\psi|T_\alpha|\psi\rangle\Big)' = M_\alpha{}^\beta\,\langle\psi|T_\beta|\psi\rangle \tag{V-59}$$

où $M_\alpha{}^\beta$ est la matrice représentant la transformation dans la représentation engendrée par le tenseur T_α (exemple : pour l'opérateur de spin et les rotations, $T = \vec{S}$ et $M = R$). Le choix de représentation est dicté par le fait que l'on veut retrouver la limite classique et que l'on interprète les valeurs moyennes des opérateurs comme des objets classiques, auxquels on impose donc les lois de transformation classiques (le spin n'a pas d'analogue classique mais on lui impose ses lois de transformation par analogie avec celles du moment angulaire). Ceci impose la relation :

$$U^\dagger T_\alpha U = M_\alpha{}^\beta T_\beta \tag{V-60}$$

Or, on peut également définir le transformé d'un opérateur, comme on l'a vu précédemment, par

$$T'_\alpha = U^\dagger T_\alpha U \tag{V-61}$$

Dans le cas d'une rotation par exemple, les T'_α sont les composantes de l'observable T qu'aurait un système tourné par rapport au système de référence. Les deux relations précédentes indiquent que si une quantité classique engendre une représentation irréductible d'un groupe, l'observable quantique correspondante est un tenseur irréductible de même rang, i.e. engendre la même représentation et vérifie donc

$$\boxed{T'_\alpha = U^\dagger T_\alpha U = M_\alpha{}^\beta T_\beta} \tag{V-62}$$

Par exemple, pour un opérateur tensoriel T_{ij} de rang deux, cette relation s'écrit :

$$T'_{ij} = U^\dagger T_{ij} U = R_{ik} R_{jl}\, T_{kl} \tag{V-63}$$

Considérons maintenant le cas particulier d'un opérateur vectoriel et d'une transformation infinitésimale. Dans ce cas, M est simplement la matrice de rotation R de $SO(3)$ et il en va de même pour U :

$$U = e^{id\vec{\theta}\,.\,\vec{J}} = \mathbb{1} + i\vec{\theta}\,.\,\vec{J}$$

On définit :

$$\delta T_i = T_i' - T_i \tag{V-64}$$

qui, dans ce cas, vaut :

$$\delta T_i = -id\theta_j \left[J_j, T_i\right] = -\epsilon_{ijk}\, d\theta_j T_k \tag{V-65}$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit vectoriel est donc

$$\boxed{\left[J_i, T_j\right] = i\epsilon_{ijk}\, T_k} \tag{V-66}$$

Appliquée à $\vec{J}$, on retrouve évidemment l'équation (II-42) et donc l'algèbre de Lie de $SO(3)$. L'équation précédente en est la généralisation à un opérateur vectoriel quelconque et l'équation (V-62), la généralisation à un opérateur tensoriel quelconque.

L'invariance par rotation nous a servi, entre autres choses, de galop d'essai pour illustrer les notions de base de la théorie des groupes. Passons maintenant à la théorie quantique relativiste (de Lorentz). Avant d'aborder l'aspect quantique, il est bon d'élargir au groupe de Lorentz, ce que nous avons vu sur l'exemple du groupe des rotations. Ceci est le sujet du chapitre suivant...

CHAPITRE 4

Le groupe de Lorentz SO(3,1) et le groupe de Poincaré

"Science avec patience,
Le supplice est sûr."
A. Rimbaud

I DÉFINITION DES GROUPES DE LORENTZ ET DE POINCARÉ

On aura besoin dans tout ce qui suit de la relativité de Lorentz et on doit donc trouver les objets qui engendrent les représentations du groupe de Lorentz : scalaires, spineurs de Lorentz, quadri-vecteurs, tenseurs de Lorentz... En dernier ressort, ces objets nous permettront de construire des invariants sous le groupe de Lorentz qui seront directement utiles pour la construction des lagrangiens des théories quantiques des champs desquels, en définitive, tout découlera[1].

Commençons par définir ce groupe et pour cela faisons un retour en arrière sur le groupe des rotations. Il est commode de définir le groupe $SO(3)$ des rotations (sur les vecteurs) comme le groupe de transformations de l'espace euclidien qui laisse invariant le carré de la distance entre deux points voisins de cet espace[2] :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{I\_1}$$

De la même façon, on peut choisir l'espace de Minkowski comme modèle de l'espace physique et alors le groupe d'isométrie de cet espace est le groupe dit de Poincaré ayant comme sous groupes, le groupe de Lorentz et le groupe des translations à quatre dimensions (il y a en plus de ces groupes continus des opérations discrètes, dites de renversement du temps et de réflexion).

1. Il y a un "petit détail" qui n'en découle pas – en tout cas, pas directement – et qui s'appelle la renormalisation. En fait, la renormalisation est, avec l'invariance de Lorentz, ce qui rend la théorie quantique et relativiste des champs assez fondamentalement différente de la théorie quantique galiléenne.

2. Le groupe des rotations est en fait un sous groupe de ce groupe qui contient les symétries miroirs (réflexion), l'inversion qui change $\vec{x} \to -\vec{x}$ et les translations. Les matrices de rotation ont un déterminant $+1$ alors que les réflexions et inversions sont toutes représentées par des matrices de déterminant -1 (elles changent l'orientation de l'espace). A noter que les translations agissent sur les points de l'espace euclidien mais pas sur les vecteurs : un vecteur reste invariant par translation.

Le groupe de Poincaré (en fait son action sur les quadri-vecteurs) est donc défini comme le groupe agissant sur les coordonnées des points d'un espace de dimension quatre et qui laisse invariant la distance au carré entre deux points voisins, définie par :

$$ds^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{I.2}$$

(remarque : un plus et trois moins ou trois plus et un moins = choix de convention). Les propriétés topologiques de l'espace de Minkowski sont identiques à celles de l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$, seules les propriétés métriques sont différentes. Le choix de cette distance (ou produit scalaire) signifie que l'on peut rapporter l'espace de Minkowski à une base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4)$ désignée génériquement $\underline{e}_\mu$ avec $\mu = 0, \ldots, 3$, telle que les (quadri-) vecteurs de cet espace se décomposent en [3] :

$$\underline{A} = A^\mu \underline{e}_\mu \qquad \text{(sommation sur } \mu \text{ sous entendue)} \tag{I.3}$$

avec par définition :

$$\underline{e}_\mu \cdot \underline{e}_\nu = \eta_{\mu\nu} \qquad \text{où} \qquad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{I.4}$$

où le "." représente par définition le produit scalaire minkowskien. Les $\underline{e}_\mu$ jouent dans l'espace de Minkowski le rôle joué par une base orthonormée dans l'espace euclidien, à la subtilité, fondamentale, près qu'il s'agit d'une métrique de signature $(+, -, -, -)$. $\eta_{\mu\nu}$ sont les composantes du *tenseur métrique*[4]. On l'appelle simplement la métrique.

Les A^μ sont appelées les composantes contra-variantes de $\underline{A}$ dans la base $\{\underline{e}_\mu\}$. Avec ces définitions, on a

$$ds^2 = \underline{dx}.\underline{dx} = dx^\mu dx^\nu \underline{e}_\mu.\underline{e}_\nu = dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} \tag{I.5}$$

ce qui est bien la définition donnée précédemment si l'on pose :

$$x^0 = t \quad , \quad x^1 = x \quad , \quad x^2 = y \quad , \quad x^3 = z \tag{I.6}$$

A Quelques définitions et conventions

• Dans toute la suite, on travaillera dans les unités où $\hbar = 1$ et $c = 1$. Ceci signifie simplement que l'on compte les vitesses en unité de la vitesse de la lumière et donc que $v = 1/2$,

3. Nous soulignerons les quadri-vecteurs pour les distinguer des vecteurs de l'espace euclidien à trois dimensions. A noter que les $\underline{e}_\mu$, en tant que vecteurs de base, ne sont pas des quadri-vecteurs au sens du groupe de Lorentz, voir la note en bas de la page 23.

4. Nous verrons dans la suite qu'il s'agit bien d'un tenseur. Pour l'instant on le considère comme un ensemble de nombres *fixés*.

par exemple, signifie que l'on se déplace à la moitié de la vitesse de la lumière. De même, on compte les distances en seconde : $x = 2$ secondes $= 2$ secondes lumière $=2 \times 3 \times 10^5$km. On peut vérifier qu'il ne reste qu'une unité indépendante que l'on peut choisir être celle de la masse et qu'une distance est une inverse masse.

• Les indices grecs courent sur quatre valeurs : $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ et les indices latins sur les trois valeurs : $i, j = 1, 2, 3$. 0 représente la composante "temporelle" : $x^0 = t$.

• Un événement P est un point de l'espace de Minkowski = un instant et un lieu.

• La convention d'Einstein consiste dans ce cas à sommer sur un indice figurant deux fois dans un monôme et *tel que l'un est situé en exposant (contra-variant) et l'autre en indice (co-variant)*. Nous verrons dans la suite pourquoi dans l'espace de Minkowski, il est commode de définir des indices en haut et en bas. On a par exemple :

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{00} dx^0 dx^0 + \eta_{11} dx^1 dx^1 + \eta_{22} dx^2 dx^2 + \eta_{33} dx^3 dx^3 \tag{I.7}$$
$$= dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{I.8}$$

• *Coordonnées co- et contra- variantes.* On peut pour n'importe quelle base et n'importe quel vecteur définir deux sortes de coordonnées :

$$\underline{A} = A^\mu \underline{e}_\mu \quad \text{et} \quad A_\mu = \underline{A} \cdot \underline{e}_\mu \tag{I.9}$$

Ces coordonnées avec indice en bas sont appelées coordonnées co-variantes. Par exemple, pour une base non orthogonale de l'espace *euclidien* ces deux types de coordonnées ne sont pas confondues :

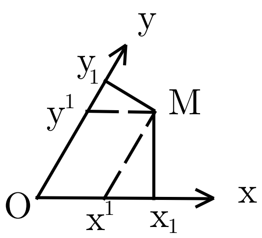

FIG. 4.1 - *Les deux types de coordonnées, covariantes et contravariantes*

Il en va de même dans l'espace de Minkowski et on peut calculer la relation entre ces coordonnées :

$$A_\mu = \underline{A} \cdot \underline{e}_\mu = A^\nu \underline{e}_\nu \cdot \underline{e}_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \tag{I.10}$$

Cette équation peut s'inverser en définissant $\eta^{\mu\nu}$ comme l'inverse de $\eta_{\mu\nu}$:

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho \tag{I.11}$$

avec δ^μ_ρ le symbole de Kronecker ordinaire (remarque : comme $\eta_{\mu\nu}$ est son propre inverse, on a pour chaque élément de matrice $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$.) On en déduit donc

$$\boxed{A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \quad \text{et} \quad A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu} \tag{I.12}$$

Ce qui s'énonce : "$\eta_{\mu\nu}$ et $\eta^{\mu\nu}$ permettent de descendre et monter les indices." Petit calcul élémentaire :

$$A_0 = A^0 \quad , \quad A_i = -A^i \tag{I.13}$$

on en déduit que

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu = dx_\mu dx^\mu \tag{I.14}$$

et plus généralement

$$\underline{A} \, . \, \underline{B} = A^\mu B^\nu \eta_{\mu\nu} = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = B_\mu A^\mu \tag{I.15}$$

> **Exercice** : Montrer que si $A_{\mu\nu}$ et $S_{\mu\nu}$ sont deux tenseurs respectivement antisymétrique et symétrique dans leurs indices, alors $A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = 0$. En déduire que si $T_{\mu\nu}$ et $T'_{\mu\nu}$ sont des tenseurs vérifiant $A^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = A^{\mu\nu} T'_{\mu\nu}$ quelque soit le tenseur antisymétrique $A^{\mu\nu}$ alors T et T' ne sont pas obligatoirement égaux. Que peut on en déduire sur les parties symétriques et antisymétriques de T et T' ?

• On pose :

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \partial_0 = \partial_t = \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x^1} = \partial_1 = \partial_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \text{etc.}\ldots$$

soit

$$\{\partial_\mu\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z) \tag{I.16}$$

On définit de même :

$$\{\partial^\mu\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right\} = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) \tag{I.17}$$

et on vérifie aisément (le faire) que comme pour un quadri-vecteur on a $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu$:

$$\{\partial^\mu\} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{I.18}$$

II TRANSFORMATIONS DE LORENTZ ET TRANSLATIONS, GROUPE SO(3,1)

Le point de vue passif est là aussi le plus simple : on imagine deux observateurs ayant chacun leurs axes dans l'espace - temps de Minkowski et décrivant les mêmes événements :

$$\text{événement } P \left\{ \begin{array}{lll} \text{dans } B & : (O_B, \underline{e}_\mu) & : \quad x^\mu = (x^0, \ldots, x^3) \\ \text{dans } B' & : (O_{B'}, \underline{e}'_\mu) & : \quad x'^\mu = (x'^0, \ldots, x'^3) \end{array} \right. \tag{II\_19}$$

On dit qu'il y a entre B et B' une transformation de Lorentz et/ou une translation (ou renversement du temps ou réflexion) si les distances minkowskiennes qu'ils attribuent chacun entre deux points voisins sont identiques :

$$\begin{aligned} && ds'^2 &= ds^2 \\ \Longleftrightarrow && \eta_{\alpha\beta}\, dx'^\alpha dx'^\beta &= \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \\ \Longleftrightarrow && \eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu &= \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \tag{II\_20}$$

d'où l'on déduit :

$$\eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{II\_21}$$

où les x'^ρ sont considérés comme des fonctions des x^μ. On déduit de cette équation deux importantes conséquences :

$$\det \eta . \left(\det \frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 = \det \eta \quad \Longrightarrow \quad \det \frac{\partial x'}{\partial x} \neq 0 \tag{II\_22}$$

et donc la transformation qui fait passer des x aux x' est inversible.

D'autre part en dérivant par rapport à x^ρ :

$$\eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\rho} = 0 \tag{II\_23}$$

que l'on réécrit avec des notations évidentes :

$$A_{(\mu\rho)\nu} + A_{(\nu\rho)\mu} = 0 \tag{II\_24}$$

où A est symétrique dans les deux indices entre parenthèses. Si l'on échange μ avec ρ :

$$A_{(\mu\rho)\nu} + A_{(\mu\nu)\rho} = 0 \tag{II\_25}$$

et ν avec ρ :

$$A_{(\mu\nu)\rho} + A_{(\nu\rho)\mu} = 0 \tag{II\_26}$$

En faisant (II_24) + (II_25) − (II_26) on obtient :

$$\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} = 0 \tag{II\_27}$$

En se servant de (II_22) on déduit :

$$\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho} = 0 \tag{II\_28}$$

et donc les x' sont des fonctions *linéaires* des x (ce qui était loin d'être évident au départ et a des conséquences mirifiques):

$$x'^\alpha = \Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\, x^\beta + a^\alpha \tag{II\_29}$$

où Λ est une matrice 4×4 et a un quadri-vecteur, tous deux étant indépendants de x. Matriciellement, l'indice nord-ouest de Λ est l'indice de ligne et l'indice sud-est celui de colonne. On verra dans la suite que l'aspect matriciel de ces opérations n'est pas très intéressant même s'il n'est pas forcément mauvais au début de comprendre la correspondance entre le calcul tensoriel que nous sommes en train de mettre au point et le calcul matriciel (en fait, voir la suite, il faut se convaincre que le recours aux matrices n'est jamais utile). La relation (II_29) n'est que nécessaire; pour être suffisante il faut s'assurer que le ds^2 est invariant, soit[5] :

$$\eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\mu}\Lambda^{\beta\cdot}_{\cdot\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{II\_30}$$

Cette relation définit les matrices Λ des transformations de Lorentz. On peut en donner une construction explicite en résolvant cette équation (ce que nous ferons dans la suite dans le cas particulier des transformations de Lorentz suivant l'axe x) mais, dans bien des cas, c'est inutile car la relation précédente est souvent suffisante à notre bonheur.

Le sous-ensemble de ces matrices de déterminant $+1$ forme un groupe appelé $SO(3,1)$ car il préserve la métrique minkowskienne contenant trois $-$ et un $+$. Le groupe complet, i.e. qui contient également les translations s'appelle le groupe de Poincaré.

A Quelques remarques sur le calcul tensoriel et le groupe de Poincaré

• Il est immédiat de montrer que l'ensemble des matrices Λ forme un groupe appelé le groupe de Lorentz. A partir de la relation (II_30) on déduit immédiatement que $(\det\Lambda)^2 = 1$ et donc que $\det\Lambda = \pm 1$. On verra que le groupe de Lorentz contient comme sous groupe le groupe des rotations $SO(3)$ à trois dimensions (ce qui est évident) et l'ensemble des transformations propres de Lorentz (celles dont on a l'habitude). Ces transformations sont toutes de déterminant

5. La relation suivante s'écrit matriciellement : ${}^t\Lambda\ \eta\ \Lambda = \eta$. Le vérifier.

$+1$ car elles ne changent pas l'orientation de l'espace - temps. En prenant la condition (II-30) pour $\mu = \nu = 0$, on trouve que

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 \geq 1 \tag{II-31}$$

On a donc deux solutions :

$$\begin{cases} \Lambda^0{}_0 \geq 1 & \text{pas de renversement du temps} \\ \Lambda^0{}_0 \leq -1 & \text{avec renversement du temps} \end{cases} \tag{II-32}$$

On appelle $\mathcal{L}_+^\uparrow$ le groupe de Lorentz propre ($\det \Lambda = +1$) orthochrone ($\Lambda^0{}_0 \geq 1$, i.e. pas de renversement du temps). C'est celui qui nous intéressera le plus souvent.

• Les transformations de réflexion et de renversement du temps correspondent aux matrices de transformation :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{II-33}$$

et

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{II-34}$$

• Nous avons *choisi* de mettre les indices de Λ en position nord-ouest et sud-est : $\Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\,\beta}$. Ce choix était évidemment dicté par la volonté d'obtenir pour $\Lambda \,.\, x$ un indice en haut comme c'était le cas pour x'^α. Ainsi, l'indice de ligne de Λ est en haut et pour que la convention d'Einstein s'applique il faut que l'indice de colonne soit en bas.

Pour l'instant $\Lambda_{\alpha\cdot}^{\cdot\,\beta}$ n'a pas de sens (non plus que $\Lambda_{\alpha\beta}$ ou $\Lambda^{\alpha\beta}$). Toute la beauté du calcul tensoriel vient de ce que la matrice inverse de $\Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\,\beta}$ est obtenue, comme on va le voir, à partir de Λ en montant et descendant les indices. En effet :

$$\begin{aligned} &\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\,\mu} \Lambda^{\beta\cdot}_{\cdot\,\nu} = \eta_{\mu\nu} \\ \Longrightarrow \quad &\eta_{\alpha\rho} \Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\,\mu} = \eta_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu\cdot}_{\cdot\,\rho} \end{aligned}$$

et donc

$$(\Lambda^{-1})^{\sigma\cdot}_{\cdot\,\rho} = \eta_{\rho\alpha} \Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\,\mu} \eta^{\mu\sigma} \tag{II-35}$$

Définissons une nouvelle matrice par

$$\Lambda_{\rho\cdot}^{\cdot\,\sigma} = \eta_{\rho\alpha}\, \Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\,\mu}\, \eta^{\mu\sigma} \tag{II-36}$$

c'est à dire que l'on manipule les indices comme s'il s'agissait d'indices de quadri-vecteurs. On trouve alors :

$$\Lambda_{\rho\,\cdot}^{\;\cdot\,\sigma} = (\Lambda^{-1})^{\sigma\,\cdot}_{\;\cdot\,\rho} = ({}^t\Lambda^{-1})^{\rho\,\cdot}_{\;\cdot\,\sigma} \quad \text{soit encore} \quad \Lambda_{\mu\,\cdot}^{\;\cdot\,\nu}\Lambda^{\rho\,\cdot}_{\;\cdot\,\nu} = \delta^\rho_\mu \tag{II-37}$$

L'inverse matriciel est donc très simple à calculer : il suffit de monter et descendre les indices grâce à la métrique. Mais en fait, il y a encore mieux car on va maintenant voir que l'on n'a jamais à considérer explicitement cet inverse non plus que la matrice transposée, la position des indices suffisant à coder toute l'information. Commençons par les vecteurs de base[6].

$$\begin{aligned} \underline{x} = x^\mu \underline{e}_\mu &= x'^\nu \underline{e}'_\nu \\ &= \Lambda^{\nu\,\cdot}_{\;\cdot\,\mu}\, x^\mu\, \underline{e}'_\nu \end{aligned} \tag{II-38}$$

soit

$$\underline{e}_\mu = \underline{e}'_\nu\, \Lambda^{\nu\,\cdot}_{\;\cdot\,\mu} \quad \text{ou} \quad \underline{e}'_\mu = \Lambda_{\mu\,\cdot}^{\;\cdot\,\nu}\, \underline{e}_\nu \tag{II-39}$$

On en déduit les transformations des coordonnées covariantes :

$$\begin{aligned} x'_\mu &= \underline{x}\,.\,\underline{e}'_\mu \\ &= \underline{x}\,.\,\Lambda_{\mu\,\cdot}^{\;\cdot\,\nu}\,\underline{e}_\nu \end{aligned} \tag{II-40}$$

et donc :

$$\boxed{x'_\mu = \Lambda_{\mu\,\cdot}^{\;\cdot\,\nu} x_\nu} \tag{II-41}$$

On voit donc que la base se transforme comme les composantes covariantes (d'où leur nom).

> **Exercice** : Montrer que la relation (II-30) signifie que le tenseur métrique est un tenseur invariant. A t'on également un tenseur métrique invariant dans le cas euclidien ?

Les points fondamentaux à remarquer sont :

1) Les composantes covariantes se transforment par la transposée de la matrice inverse des composantes contravariantes. C'était prévisible car on a vu que $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$ est invariant et donc que dx^μ et dx_μ doivent se transformer de façon inverse. De façon générale on a :

$$\underline{A}\,.\,\underline{B} = A^\mu B_\mu \tag{II-42}$$

est un scalaire de Lorentz. Le produit scalaire minkowskien réalisé avec la métrique $\eta_{\mu\nu}$ est bien la généralisation à l'espace de Minkowski du produit scalaire euclidien.

6. Il n'est pas inutile de mettre en regard de cette discussion, celle faite pour les rotations.

2) On voit maintenant tout l'intérêt des indices co- et contra- variants : on a jamais à utiliser explicitement les matrices Λ^{-1} ou ${}^t\Lambda$, seules les $\Lambda_{\mu\cdot}^{\cdot\nu}$ et $\Lambda^{\nu}_{\cdot\mu}$ importent. Les seules choses qu'il est bon d'avoir à l'esprit pour transformer correctement un quadri-vecteur sont : i) que l'on passe de l'une à l'autre forme de ces matrices en montant et descendant les indices comme s'il s'agissait d'indices de quadri-vecteurs, ii) que la transformation se fait en mettant la matrice Λ *à gauche* du quadri-vecteur et en sommant sur les indices voisins l'un en haut l'autre en bas, et iii) que les matrices Λ sont définies par l'Eq.(II_30). *La position des indices est alors automatiquement correcte.* Ainsi on a par exemple :

$$A'^{\mu_1} B'_{\nu_1} C'^{\rho_1} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\mu_2} \Lambda_{\nu_1}{}^{\nu_2} \Lambda^{\rho_1}{}_{\rho_2} A^{\mu_2} B_{\nu_2} C^{\rho_2} \tag{II\_43}$$

III LES TRANSFORMATIONS SPÉCIALES DE LORENTZ ET LES ROTATIONS

On va considérer dans un premier temps les transformations qui changent x^0 et x^1 en laissant invariants x^2 et x^3 (transformation le long de l'axe Ox) et pour lesquelles il n'y a pas de translation ($a^\mu = 0$). On veut donc que

$$(dx'^0)^2 - (dx'^1)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 \tag{III\_44}$$

Comme il s'agit d'une rotation d'un angle imaginaire[7], la paramétrisation la plus générale de ces transformations est :

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & & \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{III\_45}$$

ϕ est appelé la *rapidité*. C'est le paramètre pertinent des transformations de Lorentz. Il est similaire à $\vec{\theta}$ pour les rotations *mais il n'est pas borné* et varie entre $-\infty$ et $+\infty$. Pour cette raison, le groupe de Lorentz n'est pas un groupe compact contrairement au groupe des rotations. L'origine de certaines différences entre les deux groupes que nous verrons par la suite vient de là. Pour relier la rapidité à la vitesse du deuxième référentiel par rapport au premier, on considère un point fixe par rapport au référentiel primé (l'origine par exemple) : x'^1 = constante. On a alors :

$$-\sinh\phi\; x^0 + \cosh\phi\; x^1 = x'^1 \implies v = \frac{dx^1}{dx^0} = \tanh\phi \tag{III\_46}$$

où v est la vitesse de ce point par rapport au référentiel d'origine et est donc aussi la vitesse du référentiel primé par rapport au premier référentiel. On en déduit que $\cosh\phi = 1/\sqrt{1-v^2}$ et

7. On passe de la métrique euclidienne à la métrique minkowskienne en changeant $x^0 \to ix^0$.

$\sinh\phi = v/\sqrt{1-v^2}$ ce qui redonne la forme habituelle des transformations de Lorentz le long de l'axe Ox.

Suivant l'usage anglo-saxon, on appelle aussi ces transformations les transformations spéciales de Lorentz ou les boosts pour les distinguer des rotations qui forment un sous groupe de $SO(3,1)$ [8].

A Les algèbres de Lie de SO(4) et de SO(3,1)

1 LE CAS EUCLIDIEN

On va commencer par étudier l'ensemble des isométries d'un espace euclidien à quatre dimensions qui est un peu plus simple conceptuellement que celui de l'espace de Minkowski. Dans cet espace, le produit scalaire est le produit scalaire ordinaire entre vecteurs à quatre composantes, si bien que la métrique est simplement le kronecker à quatre indices $\delta_{\mu\nu}$. Il n'y a donc pas de distinction entre indices co- et contra- variants (dans une base orthonormée) : $x^\mu = x_\mu$ et la relation de conservation de la longueur analogue à (II_30), dans une transformation

$$x'^\mu = R^\mu{}_\nu x^\nu \tag{III\_47}$$

est :

$$\delta_{\alpha\beta} R^\alpha{}_\mu R^\beta{}_\nu = \delta_{\mu\nu} \tag{III\_48}$$

soit : ${}^tR = R^{-1}$. R est donc, bien entendu, une matrice orthogonale 4×4 comme on aurait pu le prévoir d'emblée et le groupe de ces matrices est $SO(4)$. Tout comme pour $SO(3)$, et d'ailleurs pour n'importe quel groupe de Lie, il existe ici aussi un jeu de générateurs infinitésimaux clos sous l'action du commutateur et tels qu'une transformation finie s'obtient par exponentiation (pour les transformations connexes à l'identité). Pour trouver les générateurs et surtout leur algèbre, on effectue une transformation infinitésimale :

$$R^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu \tag{III\_49}$$

La relation (III_48) devient au premier ordre en ϵ :

$$\epsilon^\mu{}_\alpha \delta_{\mu\beta} + \epsilon^\nu{}_\beta \delta_{\alpha\nu} = 0 \implies \epsilon^\beta{}_\alpha = -\epsilon^\alpha{}_\beta \tag{III\_50}$$

Matriciellement, cela donne

$$\epsilon^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & d\theta'_1 & d\theta'_2 & d\theta'_3 \\ -d\theta'_1 & 0 & d\theta_3 & -d\theta_2 \\ -d\theta'_2 & -d\theta_3 & 0 & d\theta_1 \\ -d\theta'_3 & d\theta_2 & -d\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{III\_51}$$

8. On peut montrer que *toute transformation de Lorentz peut se décomposer de façon unique en produit d'une rotation et d'une transformation spéciale de Lorentz.* Mais attention, l'ensemble des transformations spéciales *ne* forme *pas* un sous groupe car le produit de deux transformations spéciales de Lorentz donne en général le produit d'une transformation spéciale *et* d'une rotation : l'ensemble des transformations spéciales n'est pas clos, voir l'algèbre de Lie de $SO(3,1)$, Eq.(III_65).

On reconnaît évidemment dans la sous matrice 3×3 en bas à droite (par exemple) la matrice des paramètres d'une rotation infinitésimale dans le sous espace $\mathbb{R}^3$ à trois dimensions orthogonale à x^0. Les trois générateurs correspondant :

$$J_1 = J_x = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & -i \\ . & . & i & . \end{pmatrix} \ ; \ J_2 = J_y = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & i \\ . & . & . & . \\ . & -i & . & . \end{pmatrix} \ ; \ J_3 = J_z = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & -i & . \\ . & i & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \tag{III\_52}$$

sont simplement les extensions à quatre dimensions des générateurs déjà vus dans le chapitre sur le groupe des rotations à $3D$ (c'est pourquoi on les note de la même de la même façon même s'il ne s'agit pas des mêmes matrices). Il y a trois nouveaux générateurs (hermitiens) :

$$K_1' = \begin{pmatrix} . & -i & . & . \\ i & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \ ; \ K_2' = \begin{pmatrix} . & . & -i & . \\ . & . & . & . \\ i & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \ ; \ K_3' = \begin{pmatrix} . & . & . & -i \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ i & . & . & . \end{pmatrix} \tag{III\_53}$$

Une rotation finie s'écrit :

$$R = e^{i(\vec{\theta}.\vec{J}+\vec{\theta}'.\vec{K}')} \tag{III\_54}$$

L'algèbre de Lie de $SO(4)$ s'écrit :

$$\begin{cases} [J_i, J_j] & = i\epsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K'_j] & = i\epsilon_{ijk} K'_k \\ [K'_i, K'_j] & = i\epsilon_{ijk} J_k \end{cases} \tag{III\_55}$$

Posons par définition :

$$\begin{cases} A_i = \dfrac{1}{2}\left(J_i + K'_i\right) \\ B_i = \dfrac{1}{2}\left(J_i - K'_i\right) \end{cases} \tag{III\_56}$$

Il est facile de vérifier que l'algèbre de Lie de $SO(4)$ devient :

$$\begin{cases} [A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk} A_k \\ [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk} B_k \\ [A_i, B_j] = 0 \end{cases} \tag{III\_57}$$

Les A_i et les B_i vérifient donc deux algèbres de Lie de $SO(3)$ (ou $SU(2)$ puisque c'est la même) indépendantes (car ils commutent entre eux). On a donc :

$$\mathrm{Lie}\,(SO(4)) = \mathrm{Lie}\,(SO(3)) \oplus \mathrm{Lie}\,(SO(3)) \tag{III\_58}$$

Les représentations de cette algèbre sont obtenues en prenant par exemple :

$$A_i = \mathbb{1} \otimes \mathcal{J}_i^{(j_2)} \quad \text{et} \quad B_i = \mathcal{J}_i^{(j_1)} \otimes \mathbb{1} \tag{III.59}$$

où $\mathcal{J}_i^{(j_1),(j_2)}$ sont les représentants des générateurs du groupe $SU(2)$ dans la représentation de dimension $2j_{1,2}+1$ ($\vec{A}^2 = j_2(j_2+1)\mathbb{1}$, $\vec{B}^2 = j_1(j_1+1)\mathbb{1}$) respectivement : $\mathcal{J}_i^{(1/2)} = \sigma_i/2$, $\mathcal{J}_i^{(1)} =$ matrice 3×3 appelées J_i dans ce cours, etc. . . Donc une représentation de $SO(4)$ est équivalente au produit tensoriel de deux représentations de $SU(2)$: les objets se transformant par cette représentation sont étiquetés par $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ et $m_1 \in [-j_1, +j_1]$, $m_2 \in [-j_2, +j_2]$.

2 LE CAS MINKOWSKIEN

Forts de ces connaissances sur le cas euclidien nous pouvons revenir au cas minkowskien. On développe de nouveau au premier ordre la matrice Λ en :

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu \tag{III.60}$$

et pour que ce soit une transformation de Lorentz, Λ doit vérifier la relation (II.30) qui se traduit sur ϵ par :

$$\epsilon^\mu{}_\alpha \eta_{\mu\beta} + \epsilon^\nu{}_\beta \eta_{\alpha\nu} = 0 \implies \epsilon_{\beta\alpha} = -\epsilon_{\alpha\beta} \tag{III.61}$$

ou encore, matriciellement :

$$\begin{cases} \epsilon^0{}_i = \epsilon^i{}_0 \\ \epsilon^i{}_j = -\epsilon^j{}_i \end{cases} \implies \epsilon^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -d\phi_1 & -d\phi_2 & -d\phi_3 \\ -d\phi_1 & 0 & d\theta_3 & -d\theta_2 \\ -d\phi_2 & -d\theta_3 & 0 & d\theta_1 \\ -d\phi_3 & d\theta_2 & -d\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{III.62}$$

On reconnaît dans la sous matrice 3×3 en bas à droite la matrice des paramètres infinitésimaux ϵ d'une rotation dans le sous espace des trois dimensions spatiales. $d\vec{\phi}$ contient les paramètres infinitésimaux des transformations spéciales de Lorentz (voir l'équation (III.45)). Les générateurs du groupe de Lorentz sont donc les trois J_i déjà définis en (III.52) et les générateurs des boosts (les positions des indices de ces matrices sont $(K_i)^\mu{}_\nu$) :

$$K_x = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} ; \; K_y = \begin{pmatrix} . & . & 1 & . \\ . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} ; \; K_z = \begin{pmatrix} . & . & . & 1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \end{pmatrix} \tag{III.63}$$

que l'on a choisi hermitiques, choix qui implique que [9]

$$\epsilon = -d\vec{\phi}.\vec{K} + id\vec{\theta}.\vec{J} \implies \boxed{\Lambda = e^{-\vec{\phi}.\vec{K}+i\vec{\theta}.\vec{J}}} \tag{III.64}$$

9. On notera que cette relation ne permet pas l'identification directe de ϕ et $\vec{\theta}$ avec une rapidité et un angle car $\Lambda = \exp -\vec{\phi}.\vec{K} + i\vec{\theta}.\vec{J} \neq \exp -\vec{\phi}.\vec{K} \exp i\vec{\theta}.\vec{J}$ car $[J, K] \neq 0$.

Λ n'est donc pas unitaire car il n'y a pas de i en facteur du terme de boost $\vec{\phi}.\vec{K}$, dans l'exponentielle. Ceci est une illustration du théorème général énoncé dans l'encadré III, stipulant qu'un groupe non compact n'a pas de représentation unitaire de dimension finie. On peut remarquer que l'on a écrit les générateurs de Lorentz en fonction d'opérateurs $\vec{J}$ et $\vec{K}$ qui sont des vecteurs pour les rotations. On peut réécrire cela de façon plus covariante de Lorentz : $\Lambda = \exp(-i/2\,\theta_{\mu\nu}J^{\mu\nu})$ où $\theta_{\mu\nu}$ et $J^{\mu\nu}$ contiennent respectivement les paramètres et les générateurs des boosts et des rotations, voir encadré V.

Calculons l'algèbre de Lie de $SO(3,1)$:

$$\begin{cases} [J_i, J_j] & = i\epsilon_{ijk}J_k \\ [J_i, K_j] & = i\epsilon_{ijk}K_k \\ [K_i, K_j] & = i\epsilon_{ijk}J_k \end{cases} \tag{III\_65}$$

On a donc formellement la même algèbre que pour $SO(4)$, la seule différence résidant dans le fait que les matrices Λ ne sont pas unitaires. On pose de façon similaire :

$$\begin{cases} N_i & = \dfrac{1}{2}(J_i + K_i) \\ Q_i & = \dfrac{1}{2}(J_i - K_i) \end{cases} \tag{III\_66}$$

qui sont bien entendu hermitiques et vérifient :

$$\begin{cases} [N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}N_k \\ [Q_i, Q_j] = i\epsilon_{ijk}Q_k \\ [N_i, Q_j] = 0 \end{cases} \tag{III\_67}$$

Il s'agit donc de nouveau de deux algèbres de $SU(2)$. Les représentations sont donc de nouveau étiquetées par deux entiers ou demi-entiers j_1 et j_2. Le point remarquable est que $J_z = N_3 + Q_3$ et donc que le j de $\vec{J}^2 = j(j+1)\mathbb{1}$, qui est égal à la valeur propre la plus haute de J_z, $j = m_{\max}$, est également la somme de la valeur propre la plus grande de N_3, $j_2 = m_{2\max}$, et de la valeur propre la plus grande de Q_3, $j_1 = m_{1\max}$:

$$j = j_1 + j_2 \qquad = \text{“spin” de la représentation} \tag{III\_68}$$

On emploie ici un vocabulaire quantique car la correspondance devrait commencer à être claire.

On peut déjà en déduire les différents types de représentation que l'on a :

• **spin 0** : $j_1 = 0 = j_2 \Longrightarrow J_i = K_i = 0$. Il s'agit de la matrice de transformation identité et c'est donc la représentation scalaire engendrée par exemple par ds^2 et $\underline{A}\,.\,\underline{B}$.

V. Algèbre de Lie de SO(3,1) et opérateurs tensoriels

Nous avons écrit l'algèbre de Lie de $SO(3,1)$ en fonction des générateurs des rotations et des boosts. Ces générateurs sont des opérateurs vectoriels pour les rotations (le vérifier pour les boosts). On peut logiquement s'attendre à ce que, comme pour les générateurs de $SO(3)$, les générateurs de $SO(3,1)$ forment un tenseur pour ce groupe. Montrons le et déduisons en une forme évidemment covariante de l'algèbre de Lie.
Remarquons que pour une transformation infinitésimale, on peut réécrire (III_60) sous la forme :

$$\Lambda = \mathbb{1} - \frac{1}{2} i\,\epsilon_{\alpha\beta}\, J^{\alpha\beta} \quad \Longrightarrow \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} i\,\epsilon_{\alpha\beta} \Big(J^{\alpha\beta}\Big)^\mu{}_\nu$$

avec $J^{\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha}$ puisque $\epsilon^{\alpha\beta}$ est antisymétrique. Attention, il ne faut pas confondre les indices α et β avec des indices d'éléments de matrice : pour un α et un β particulier, $J^{\alpha\beta}$ est une matrice dont les éléments de matrice sont notés $\Big(J^{\alpha\beta}\Big)^\mu{}_\nu$. On doit bien sûr avoir $-\frac{1}{2} i\epsilon_{\alpha\beta}\Big(J^{\alpha\beta}\Big)^\mu{}_\nu = \epsilon^\mu{}_\nu$ pour que (III_60) soit vérifiée. On en déduit que (le vérifier) : $\left(J_{\alpha\beta}\right)^\mu{}_\nu = i\left(\delta^\mu_\alpha\, \eta_{\nu\beta} - \delta^\mu_\beta\, \eta_{\nu\alpha}\right)$. Il est facile (et pas inintéressant) de voir que ceci entraîne

$$\begin{cases} J_{0i} = -iK_i \\ J_{ij} = \epsilon_{ijk} J_k \end{cases} \tag{III_69}$$

et donc que les six $J^{\alpha\beta}$ (six à cause de l'antisymétrie) sont les générateurs des boosts et des rotations. Pour une transformation finie, on a $\Lambda = \exp\left(-\frac{1}{2} i\theta_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta}\right)$, si bien que l'on traite de façon symétrique boosts et rotations. $\theta_{\alpha\beta}$ contient, à la fois, les paramètres du boost et de la rotation. L'algèbre de Lie de $SO(3,1)$ peut évidemment s'écrire en fonction de ces $J^{\alpha\beta}$:

$$\Big[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}\Big] = i\left(\eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}\right) \tag{III_70}$$

C'est un excellent exercice de retrouver l'équation précédente en notant que les générateurs peuvent très commodément s'écrire $J_{\mu\nu} = i(|\mu\rangle\langle\nu| - |\nu\rangle\langle\mu|)$ et que le produit scalaire est, bien entendu, minkowskien : $\langle\alpha|\mu\rangle = \eta_{\alpha\mu}$. L'algèbre de Lie de $SO(3,1)$ est, si l'on veut bien y réfléchir un peu, la plus simple (la seule ? le vérifier) dont le membre de droite est linéaire et respecte l'antisymétrie des $J^{\alpha\beta}$.
Elle signifie aussi que les $J^{\alpha\beta}$ forment un opérateur tensoriel antisymétrique à deux indices, tout comme l'algèbre de Lie de $SO(3)$ signifie que les J_i forment un opérateur vectoriel (on verra dans le cas quantique que $U^\dagger(\Lambda) J^{\mu\nu} U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma J^{\rho\sigma}$ et que pour une transformation infinitésimale, cette relation se ramène à l'algèbre de Lie).

• **spin 1/2** :
$$\begin{cases} j_1 = 1/2 \quad \text{et } j_2 = 0 \qquad \text{dite } (1/2, 0) \\ \text{ou} \\ j_1 = 0 \qquad \text{et } j_2 = 1/2 \quad \text{dite } (0, 1/2) \end{cases}$$

Pour la $(1/2, 0)$: $\vec{Q} = \vec{\sigma}/2 \otimes 1 = \vec{\sigma}/2$ et $\vec{N} = 1 \otimes \vec{0} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{J} = -\vec{K} = \vec{\sigma}/2$
les matrices de transformation sont donc :

$$\boxed{M_1(\vec{\theta}, \vec{\phi}) = e^{+\vec{\phi}.\frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta}.\frac{\vec{\sigma}}{2}}} \tag{III\_71}$$

Pour la $(0, 1/2)$: $\vec{Q} = \vec{0} \otimes 1 = \vec{0}$ et $\vec{N} = 1 \otimes \vec{\sigma}/2 = \vec{\sigma}/2 \Longrightarrow \vec{J} = \vec{K} = \vec{\sigma}/2$
les matrices de transformation sont donc :

$$\boxed{M_2(\vec{\theta}, \vec{\phi}) = e^{-\vec{\phi}.\frac{\vec{\sigma}}{2} + i\vec{\theta}.\frac{\vec{\sigma}}{2}}} \tag{III\_72}$$

Les objets qui se transforment par M_1 et M_2 sont clairement des objets à deux composantes complexes. On constate que pour une rotation pure ($\vec{\phi} = \vec{0}$), M_1 et M_2 sont confondues et sont les matrices de $SU(2)$ qui transforment les spineurs sous les rotations. Les objets de type 1 et 2, i.e. qui se transforment respectivement par M_1 et M_2 dans un changement d'axes dans l'espace de Minkowski, sont des spineurs de spin 1/2 que *seul le comportement dans les boosts différencie*. Nous reviendrons dans la suite sur la signification physique de cette différence. Pour l'instant faisons quelques remarques.

B Construction de la relation SO(3,1) - SL(2,ℂ)

• L'ensemble des matrices M_1 (et idem pour M_2 évidemment) est le groupe $SL(2, \mathbb{C})$:
S : det $M_1 = 1$
L : linéaire, i.e. aucune contrainte d'unitarité ou autre
$2 : 2 \times 2$
$\mathbb{C}$: à coefficients complexes.

$$M \in SL(2, \mathbb{C}) \iff M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \; , \; ad - bc = 1$$

Ce groupe dépend de 6 paramètres réels comme $SO(3, 1)$ (s'en assurer). Comme on le verra, $SL(2, \mathbb{C})$ joue pour $SO(3, 1)$ le rôle que $SU(2)$ joue pour $SO(3)$: c'est le recouvrement universel de $SO(3, 1)$. A partir des représentations $\{M_1\}$ et $\{M_2\}$ de $SL(2, \mathbb{C})$ on pourra construire toutes les autres.

• Construisons explicitement un homomorphisme qui envoie les matrices de $SL(2, \mathbb{C})$ sur les matrices de $SO(3, 1)$. La construction est analogue à celle faite pour l'homomorphisme entre $SU(2)$ et $SO(3)$, voir page 29.

1) On définit $\sigma_\mu = (\mathbf{1}, \vec{\sigma})$. Une matrice hermitique quelconque X peut se paramétriser par :

$$X = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} t + z & x - iy \\ x + iy & t - z \end{pmatrix} \tag{III\_73}$$

On a déjà vu qu'alors $x^\mu = 1/2\,\mathrm{Tr}(X\sigma_\mu)$.

2) $\det X = (x^0)^2 - (\vec{x})^2 = \underline{x}^2$

3) On définit l'application Λ_M agissant sur les matrices hermitiques X par :

$$X' = \Lambda_M(X) = MXM^\dagger \quad \text{avec} \quad M \in SL(2,\mathbb{C})$$

Cette application conserve effectivement l'hermiticité car

$$X'^\dagger = \left(MXM^\dagger\right)^\dagger = X'$$

X' peut donc aussi se décomposer sur les σ_μ, soit : $X' = x'^\mu \sigma_\mu$.

Elle conserve aussi le déterminant : $\det X' = \det X$ et donc $\underline{x}'^2 = \underline{x}^2$. Il doit donc exister une transformation de $SO(3,1)$ entre $\underline{x}$ et $\underline{x}'$. Appelons de nouveau Λ (en omettant l'indice M) cette transformation :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{III\_74}$$

Nous avons ainsi construit, à partir d'une transformation M de $SL(2,\mathbb{C})$ sur les matrices hermitiques $X(x^\mu)$, une transformation Λ_M de $SO(3,1)$ sur les quadri-vecteurs x^μ et donc un homomorphisme de $SL(2,\mathbb{C})$ vers $SO(3,1)$.

4) On peut trouver explicitement $\Lambda^\mu{}_\nu$ en fonction de M (il s'agit en fait de M_2, voir la suite) :

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X'\sigma_\mu) && \text{(III\_75)} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(Mx^\nu\sigma_\nu M^\dagger\sigma_\mu\right) && \text{(III\_76)} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M\sigma_\nu M^\dagger\sigma_\mu\right)x^\nu && \text{(III\_77)} \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\Lambda^\mu{}_\nu = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M\sigma_\nu M^\dagger\sigma_\mu\right)} \tag{III\_78}$$

Donc, comme on devait s'en douter, cette représentation n'est pas fidèle car, comme pour $SU(2)$, les deux matrices $\pm M$ sont associées à la même matrice Λ. L'homomorphisme inverse de $SO(3,1)$ vers $SL(2,\mathbb{C})$ est bi-valué.

• *Mais il y a du nouveau.* Dans le cas de $SU(2)$ les matrices de $SU(2)$ forment évidemment une (auto-) représentation de $SU(2)$ et les matrices complexes conjuguées (représentées indifféremment par une étoile ou une barre) forment une représentation équivalente car :

$$U \in SU(2) \implies U^* = \epsilon\, U\, \epsilon^{-1}$$

avec ϵ la matrice du tenseur antisymétrique. *Il n'en est pas de même pour* $SL(2,\mathbb{C})$ car $M \to M^*$ est un endomorphisme de $SL(2,\mathbb{C})$ qui n'est pas une équivalence. Or comme nous allons le montrer, $\{M_2\}$ est équivalent à $\{M_1^*\}$ et n'est donc pas équivalent à $\{M_1\}$. Les ensembles de matrices $\{M_1\}$ et $\{M_2\}$ forment donc deux représentations inéquivalentes de $SO(3,1)$, chacune étant bi-valuée : $\pm M_1(\vec{\theta},\vec{\phi}) \to \Lambda(\vec{\theta},\vec{\phi})$ et $\pm M_2(\vec{\theta},\vec{\phi}) \to \Lambda(\vec{\theta},\vec{\phi})$.
Décomposons les étapes de la preuve.

1) Montrons que $\epsilon\,\sigma_i^{*\,t}\epsilon = -\sigma_i$.
Il est facile de vérifier explicitement que $\epsilon\sigma_i$ est symétrique pour tout $i = 1,2,3$. On a donc :

$$\begin{aligned}\epsilon\,\vec{\sigma} &= {}^t(\epsilon\,\vec{\sigma})\\ &= {}^t\vec{\sigma}\,{}^t\epsilon\\ &= -{}^t\vec{\sigma}\,\epsilon\end{aligned} \tag{III\_79}$$

d'où le résultat en prenant le conjugué et en multipliant à droite par ϵ^{-1}.

2) On en déduit que $M_2(\vec{\theta},\vec{\phi}) = \epsilon\, M_1^*(\vec{\theta},\vec{\phi})\,\epsilon^{-1}$

$$\begin{aligned}\epsilon\, M_1^*\,\epsilon^{-1} &= \epsilon\, e^{-i(\vec{\theta}+i\vec{\phi})\vec{\sigma}^*/2}\,\epsilon^{-1}\\ &= e^{i(\vec{\theta}+i\vec{\phi})\vec{\sigma}/2} \qquad \text{le montrer}\\ &= M_2(\vec{\theta},\vec{\phi}) \qquad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned} \tag{III\_80}$$

• Il y a donc deux homomorphismes inéquivalents de $SL(2,\mathbb{C})$ vers $SO(3,1)$ et nous n'en avons construit qu'un jusqu'à maintenant. Montrons que c'est celui qui envoie les matrices M_2 sur les Λ. Pour cela, construisons explicitement la transformation de Lorentz induite sur x^μ par une transformation $X' = M_2 X M_2^\dagger$ avec $M_2 = \exp\left(-\vec{\phi}\,.\,\vec{\sigma}/2\right) = \cosh\phi/2\,\mathbb{1} - \sinh\phi/2\,\sigma_z$ pour $\vec{\phi} = \phi\hat{z}$. Dans ce cas :

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cosh\phi/2 - \sinh\phi/2 & 0 \\ 0 & \cosh\phi/2 + \sinh\phi/2 \end{pmatrix} = M_2^\dagger \tag{III\_81}$$

On trouve alors

$$X' = \begin{pmatrix} (c-s)^2(x^0+x^3) & (c^2-s^2)(x^1-ix^2) \\ (c^2-s^2)(x^1+ix^2) & (c+s)^2(x^0-x^3) \end{pmatrix} \tag{III\_82}$$

avec $c, s = \cosh, \sinh\ \phi/2$. On en déduit que

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{III\_83}$$

Nous avons donc explicitement montré qu'à la transformation $M_2(0,\phi\hat{z})$, correspond la transformation de Lorentz selon l'axe Oz de rapidité ϕ, $\Lambda(\vec{0},\phi\hat{z})$. Comme le sous groupe des rotations a déjà été étudié, la preuve est complète. *La relation (III_78) est donc en fait valable pour les matrices M_2 et seulement pour elles.*

• Quid de M_1 ? La relation entre $\Lambda(\vec{\theta},\vec{\phi})$ et $M_1(\vec{\theta},\vec{\phi})$ s'obtient trivialement en se servant de l'Eq.(III_80). On construit les matrices $\tilde{\sigma}_\mu = \epsilon^{-1}\sigma^*_\mu\epsilon = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma})$ qui forment évidemment aussi une base des matrices 2×2. On construit de même les matrices $\tilde{X} = x^\mu\tilde{\sigma}_\mu$ et on considère le même type de transformation qu'auparavant mais avec les matrices M_1 cette fois ci : $\tilde{X}' = M_1\tilde{X}M_1^\dagger$. Il est alors élémentaire de montrer en prenant le complexe conjugué de $X' = M_2XM_2^\dagger$ et en se servant de (III_80) que

$$X' = M_2XM_2^\dagger \quad\Longrightarrow\quad \tilde{X}' = M_1\tilde{X}M_1^\dagger \tag{III\_84}$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\Lambda^\mu{}_\nu = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(M_1\tilde{\sigma}_\nu M_1^\dagger\tilde{\sigma}_\mu\right)} \tag{III\_85}$$

• On déduit des relations précédentes que

$$\boxed{\begin{aligned} M_2\sigma_\nu M_2^\dagger &= \Lambda^\mu{}_\nu\sigma_\mu \\ M_1\tilde{\sigma}_\nu M_1^\dagger &= \Lambda^\mu{}_\nu\tilde{\sigma}_\mu \end{aligned}} \tag{III\_86}$$

Ces équations sont les extensions au groupe de Lorentz de l'équation (II_41). Elles impliquent que les σ_μ et $\tilde{\sigma}_\mu$ forment deux opérateurs quadri-vectoriels (inversés par parité).

La différence et l'intérêt physique de ces deux représentations viennent de leur comportement dans la *parité* (réflexion des trois axes $\hat{x}' = -\hat{x},\ \hat{y}' = -\hat{y},\ \hat{z}' = -\hat{z}$). On constate d'ailleurs que le passage de X à $\tilde{X}$, et donc de M_1 à M_2, revient à changer les composantes d'espace de signe, en laissant invariante la composante temporelle. Il s'agit donc d'une opération de réflexion.

IV LA PARITÉ

Petite remarque préliminaire : le produit vectoriel de deux vecteurs (à trois dimensions) n'est pas tout à fait un vecteur. En effet :

$$C_x = (\vec{A}\wedge\vec{B})_x = A_yB_z - A_zB_y \tag{IV\_87}$$

et c'est donc, en fait, un *tenseur à deux indices antisymétriques*. En fait grâce au tenseur complètement antisymétrique ϵ_{ijk}, on peut "transformer" un tenseur à deux indices antisymétriques en un vecteur :

$$C_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k \tag{IV\_88}$$

Il est facile de voir que comme ϵ_{ijk} est un tenseur invariant sous les rotations de $SO(3)$, $\vec{A}\wedge\vec{B}$ se comporte bien dans les rotations comme un vecteur, **mais** qu'il est invariant dans une transformation (active) de parité qui consiste à changer les vecteurs en leurs opposés : $(\vec{A}\wedge\vec{B})' = (-\vec{A})\wedge(-\vec{B}) = \vec{A}\wedge\vec{B}$. On l'appelle pour cette raison un pseudo-vecteur. Par extension, tout vecteur qui est invariant dans une réflexion est appelé un pseudo - vecteur. C'est le cas du champ magnétique et c'est la raison pour laquelle, par exemple, la force de Lorentz d'un champ magnétique sur une charge q est un produit vectoriel : $\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$. On a vu dans la note en bas de la page 23 que

$$V'_i = V_i - (\vec{\theta}\wedge\vec{V})_i$$

et donc pour que $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ soient des vecteurs, il faut que $\vec{\theta}$ soit un pseudo - vecteur. On peut le vérifier dans le cas infinitésimal sur la forme de la matrice des paramètres infinitésimaux, Eq.(III_51) (et commentaires suivants). Il n'en est pas de même de la rapidité $\vec{\phi}$, Eq.(III_62).

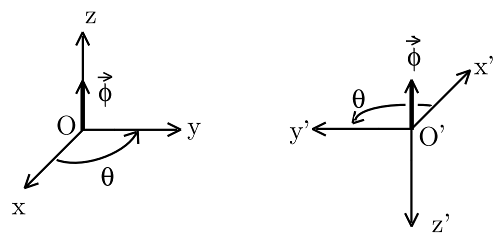

Fig. 4.2 - *Deux observateurs inversés l'un par rapport l'autre*

Reprenons cette discussion de façon plus imagée. Considérons 2 observateurs dont les repères sont inversés comme sur la figure 4.2.
Imaginons que l'on fasse subir la même rotation $d\vec{\theta} = d\theta\hat{z}$ à chacun des repères.

Dans les deux cas la rotation va de Ox vers Oy, donc

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \left[\mathbb{1} + d\theta\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \left[\mathbb{1} + d\theta\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(IV\_89)}$$

ce qui est évident puisque $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \implies (x'_1, y'_1) = (x'_2, y'_2)$. Or, si chacun des observateurs ramène l'espace à sa propre base, les matrices numériques représentant les $(\hat{J}_{x_1}, \hat{J}_{y_1}, \hat{J}_{z_1})$ et les $(\hat{J}_{x_2}, \hat{J}_{y_2}, \hat{J}_{z_2})$ sont les mêmes : $J^{(1)}_{x_1} = J^{(2)}_{x_2}$, etc... Ils s'accordent donc à dire que

$$d\theta_1 = d\theta_2 \qquad \text{(IV\_90)}$$

bien que $\hat{z}_1 = -\hat{z}_2$. $d\vec{\theta}$ est donc bien un pseudo - vecteur. *Il indique un sens de rotation (qui est le même pour les deux observateurs) et non une direction de l'espace*[10]. Par contre, pour

10. C'est ce qui permet de comprendre que $SO(4)$ a six générateurs et non quatre, comme on pourrait naïvement le croire en supposant qu'il y a quatre "axes de rotation" indépendants. En fait, il y a six plans

un boost parallèle à Oz dans le même sens que $\hat{z}$, les coordonnées de $\vec{\phi}$ changent entre les deux observateurs. Explicitement :

$$\begin{pmatrix} t'_1 \\ z'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi_1 & \sinh\phi_1 \\ \sinh\phi_1 & \cosh\phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} t'_2 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi_2 & \sinh\phi_2 \\ \sinh\phi_2 & \cosh\phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(IV\_91)}$$

comme on a $(t_2, z_2) = (t_1, -z_1)$ et donc $(t'_2, z'_2) = (t'_1, -z'_1)$, on déduit que

$$\phi_2 = -\phi_1 \qquad \text{(IV\_92)}$$

ce qui est en accord avec notre dessin.

La parité, en tant que symétrie (violée ou non), ainsi que les spineurs, ne sont vraiment intéressants que dans le cadre quantique. Plaçons nous donc dans ce cadre. On adoptera dans la suite le point de vue passif où on a deux observateurs inversés spatialement l'un par rapport à l'autre : les coordonnées d'espace classiques d'un même événement sont opposées pour les deux observateurs et le temps est identique pour les deux. Les vitesses ont par conséquent des composantes opposées. D'après notre principe de correspondance, on choisit donc quantiquement de prendre :

$$\begin{cases} U_P^\dagger X_i U_P = -X_i \\ U_P^\dagger P_i U_P = -P_i \\ U_P^\dagger U_P = U_P U_P^\dagger = \mathbb{1} \end{cases} \qquad \text{(IV\_93)}$$

où U_P est l'opérateur représentant la transformation de parité dans l'espace de Hilbert [11]. On déduit de cela que le moment cinétique orbital, $\vec{L} = \vec{X} \wedge \vec{P}$ est invariant par parité. On retrouve bien ainsi la discussion classique. Par analogie avec la partie orbitale, on suppose qu'il en est de même du spin. L'opération de parité inversant les vitesses, on suppose donc aussi par analogie avec le cas classique que

$$U_P^\dagger K_i U_P = -K_i \qquad \text{(IV\_94)}$$

où par abus de langage, on note encore K_i le générateur des boosts de Lorentz dans l'espace de Hilbert.

Le point qui nous intéresse pour la suite est que les deux représentations de spin 1/2 sont échangées par parité comme on peut le voir immédiatement sur (III_71) et (III_72). Ceci

perpendiculaires indépendants dans un espace de dimension quatre : $(t,x), (t,y), \dots (y,z)$ et donc six rotations indépendantes. Ces rotations ne peuvent pas être repérées par seulement un vecteur. Le raisonnement est identique pour $SO(2)$ où il y a un seul générateur car il n'y a qu'un plan indépendant (dans un espace de dimension deux !), bien qu'il y ait deux axes perpendiculaires de coordonnées.

11. Comme U_P est une opération discrète, il n'est pas a priori trivial que ce soit un opérateur linéaire puisque le théorème de Wigner permet l'existence d'opérateurs anti - linéaires pour lesquels $A(\lambda|\phi\rangle) = \bar{\lambda}A|\phi\rangle$. On peut facilement se convaincre que U_P doit être linéaire en vérifiant que l'algèbre entre X et P n'est préservée par l'opération de parité que dans ce cas. Le montrer. L'invariance par parité d'une théorie quantique de particules est donnée par la condition : $[U_P, H] = 0$

signifie (comme on pourrait le montrer plus précisément) que si un observateur attribue à un objet quantique, un vecteur d'état qui est un spineur se transformant par exemple par M_1 lors des transformations de Lorentz, alors l'autre observateur attribuera au même objet, un spineur se transformant par M_2. Ainsi, si l'on a invariance par parité, les deux observateurs trouveront les mêmes résultats pour toutes leurs mesures et aucune des représentations M_1 ou M_2 ne sera privilégiée par rapport à l'autre : les deux orientations de l'espace sont dans ce cas équivalentes et les deux types de spineurs doivent intervenir symétriquement dans n'importe quelle loi physique.

Il n'est pas mauvais de retrouver ce résultat en raisonnant dans le point de vue actif. Dans ce point de vue, dire qu'une théorie est invariante par parité, revient à dire que si un système est décrit par un spineur se transformant par M_1, alors le système obtenu en effectuant une inversion doit lui aussi exister, doit être décrit par un spineur se transformant par M_2 et doit obéir aux mêmes lois que le système initial. Dit autrement, une telle théorie doit traiter sur un pied d'égalité les deux types de spineur, tout comme une théorie invariante par rotation doit traiter toutes les composantes d'un vecteur de façon identique.

Ainsi, et pour la même raison qu'il est avantageux de réunir dans un même triplet les composantes d'un vecteur, il va être commode, pour les théories invariantes par parité, de réunir dans un même quadruplet deux spineurs de chaque type :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \qquad \text{(IV\_95)}$$

où ψ_L et ψ_R se transforment par M_1 et M_2 respectivement. Se transformant différemment, ce sont des objets *indépendants*. Il ne faut pas se laisser abuser par les notations ![12] On appelle bi-spineur, ces “spineurs” à quatre composantes. Ces bi-spineurs forment des représentations réductibles du groupe de Lorentz et des représentations irréductibles du groupe formé de Lorentz et de la parité, comme nous le verrons par la suite.

Si la théorie considérée n'est pas invariante par parité, comme c'est le cas de l'interaction faible, alors les deux types de spineur ne jouent pas le même rôle dans la théorie, c'est à dire ne sont pas couplés de la même façon aux autres champs (vectoriels en particulier) de la théorie.

Avant d'aborder les bi-spineurs, apprenons à former des scalaires et des quadri-vecteurs à partir des spineurs. Ceci sera très utile dans la suite lorsqu'on cherchera à construire des lagrangiens invariants de Lorentz.

12. Il n'est pas rare que l'on désigne par la même lettre, à l'indice près, les composantes d'un vecteur, $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$. Ceci ne signifie pas que ces composantes ne sont pas indépendantes.

V COMMENT FAIRE DES SCALAIRES ET DES QUADRI-VECTEURS AVEC DES SPINEURS

Il est important de savoir fabriquer des scalaires avec les spineurs car, en dernier ressort, c'est ce dont nous aurons besoin pour construire les lagrangiens des théories quantiques des champs faisant intervenir des particules de spin 1/2 (les lagrangiens sont des scalaires). En fait, le lagrangien de Dirac, et donc l'équation du même nom, sont une conséquence directe de l'invariance relativiste de Lorentz et se ramène donc à la recherche des différents invariants de plus bas degré construits avec des bi-spineurs[13].

On va aussi chercher à construire des vecteurs à partir des bi-spineurs, car on sait déjà fabriquer des scalaires lorsqu'on a des vecteurs : il suffit simplement de faire le produit scalaire avec un autre vecteur. Ceci sera important lorsqu'on voudra coupler une particule de spin 1/2, décrite par un bi-spineur, et une particule de spin 1, décrite par un quadri-vecteur. L'exemple classique est celui du couplage électron - champ électromagnétique dans le lagrangien de l'électrodynamique quantique.

On va maintenant poser par définition qu'un spineur se transformant par M_1 sera dit gauche et noté ψ_L (L comme gauche) et qu'un spineur se transformant par M_2 sera dit droit et noté ψ_R (R comme droit) :

$$(\psi'_L)_\alpha = (M_1)_\alpha^\beta \, (\psi_L)_\beta \tag{V-96}$$

$$(\psi'_R)_\alpha = (M_2)_\alpha^\beta \, (\psi_R)_\beta \tag{V-97}$$

Il est facile de former un scalaire avec une forme bilinéaire de spineurs comme dans le cas des rotations. En effet, considérons deux spineurs χ_L et ψ_L qui sont échangés par parité respectivement avec χ_R et ψ_R, alors :

$$\chi_L^\dagger \psi_R + \chi_R^\dagger \psi_L$$

est invariant par parité car :

$$(\chi_L^\dagger \psi_R)' = {\chi'}_L^\dagger \psi'_R = \chi_R^\dagger \psi_L \tag{V-98}$$

et

$$(\chi_R^\dagger \psi_L)' = {\chi'}_R^\dagger \psi'_L = \chi_L^\dagger \psi_R \tag{V-99}$$

13. Ceci n'a pas du tout été la façon de procéder de Dirac. Il lui a fallu pas mal d'intuition et une persévérance marquée pour trouver son équation et surtout pour y croire (elle était pleine de contradictions internes dans le cadre quantique de l'époque). L'exposé présenté dans la suite de ces notes est donc une sorte de trahison du processus créatif, en tout cas de celui de Dirac.

Pour ce qui est des quadri-vecteurs, on sait déjà que $\vec{V} = \chi_L^\dagger \vec{\sigma} \psi_L$ est un vecteur pour les rotations. Il paraît donc naturel de chercher un V^0 bilinéaire en χ_L et ψ_L qui soit la composante temporelle de $V^\mu = (V^0, \vec{V})$. Il paraît tout indiqué d'essayer $\chi_L^\dagger \psi_L$ que l'on sait déjà être un scalaire sous les rotations. Effectuons un boost infinitésimal. On a d'une part :

$$
\begin{aligned}
(\chi_L^\dagger \psi_L)' &= \chi_L^\dagger \, M_1^\dagger \, M_1 \, \psi_L = \chi_L^\dagger \, e^{\vec{\sigma}\,.\,d\vec{\phi}} \, \psi_L && \text{(V\_100)} \\
&= \chi_L^\dagger \, \psi_L + d\vec{\phi}\,.\,(\chi_L^\dagger \, \vec{\sigma} \, \psi_L) && \text{(V\_101)}
\end{aligned}
$$

et d'autre part :

$$
\begin{aligned}
(\chi_L^\dagger \, \vec{\sigma} \, \psi_L)' &= \chi_L^\dagger \, e^{\frac{\vec{\sigma}}{2}\,.\,d\vec{\phi}} \, \vec{\sigma} \, e^{\frac{\vec{\sigma}}{2}\,.\,d\vec{\phi}} \, \psi_L && \text{(V\_102)} \\
&= \chi_L^\dagger \left(\mathbb{1} + \frac{\vec{\sigma}}{2}\,.\,d\vec{\phi}\right) \vec{\sigma} \left(\mathbb{1} + \frac{\vec{\sigma}}{2}\,.\,d\vec{\phi}\right) \psi_L && \text{(V\_103)}
\end{aligned}
$$

Prenons par exemple une transformation de Lorentz suivant l'axe Ox. On a alors :

$$
\begin{pmatrix} \chi_L^\dagger \psi_L \\ \chi_L^\dagger \sigma_x \psi_L \\ \chi_L^\dagger \sigma_y \psi_L \\ \chi_L^\dagger \sigma_z \psi_L \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & d\phi & & \\ d\phi & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L^\dagger \psi_L \\ \chi_L^\dagger \sigma_x \psi_L \\ \chi_L^\dagger \sigma_y \psi_L \\ \chi_L^\dagger \sigma_z \psi_L \end{pmatrix} \qquad \text{(V\_104)}
$$

Il s'agit bien de la transformation d'un quadri-vecteur. Plus précisément on peut facilement montrer que :

$$
\begin{cases} \left(\chi_L^\dagger \psi_L \,,\, \chi_L^\dagger \, \vec{\sigma} \, \psi_L\right) & \text{composantes covariantes d'un 4-vecteur} \\ \left(\chi_R^\dagger \psi_R \,,\, \chi_R^\dagger \, \vec{\sigma} \, \psi_R\right) & \text{composantes contravariantes d'un 4-vecteur} \end{cases} \qquad \text{(V\_105)}
$$

donc, en posant par définition (voir page 85) :

$$
\{\sigma^\mu\} = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \quad \text{et} \quad \{\tilde{\sigma}^\mu\} = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \qquad \text{(V\_106)}
$$

on a :

$$
\begin{aligned}
V^\mu &= \chi_L^\dagger \, \sigma^\mu \, \psi_L && \text{(V\_107)} \\
W^\mu &= \chi_R^\dagger \, \tilde{\sigma}^\mu \, \psi_R && \text{(V\_108)}
\end{aligned}
$$

qui sont des quadri-vecteurs.

VI BI-SPINEURS – MATRICES DE DIRAC – SCALAIRES ET QUADRI-VECTEURS

On a déjà vu que lorsqu'on veut construire une théorie invariante par parité, on a intérêt à utiliser des bi-spineurs définis par

$$
\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \qquad \text{(VI\_109)}
$$

où ψ_L et ψ_R sont des spineurs à deux composantes a priori *indépendants* et qui sont échangés par parité. On appelle ψ un bi-spineur de Dirac. Dans le point de vue passif, si un observateur $\mathcal{O}$ associe à un objet physique, le bi-spineur ψ, un observateur $\mathcal{O}'$, inversé par rapport à $\mathcal{O}$, associe au même objet physique le bi-spineur

$$\psi' = \begin{pmatrix} \psi'_L \\ \psi'_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \gamma^0 \psi \qquad \text{(VI\_110)}$$

(ce qui est gauche pour l'un est droit pour l'autre et vice versa). $\mathbb{1}$ signifie ici la matrice unité 2×2. Cette relation définit la matrice γ^0.

Examinons maintenant le comportement dans la parité des scalaires que nous avons construits. D'après tout ce qui précède, on voit donc que l'on peut définir deux types de scalaires de Lorentz : d'une part les "vrais" scalaires qui sont également scalaires sous la parité :

$$S = \chi_L^\dagger \psi_R + \chi_R^\dagger \psi_L \qquad \text{(VI\_111)}$$

et les "pseudo-scalaires qui sont transformés en leur opposé par parité[14] :

$$P = \chi_L^\dagger \psi_R - \chi_R^\dagger \psi_L \qquad \text{(VI\_112)}$$

Il est temps maintenant de réécrire tout cela en termes de nos bi-spineurs. On définit pour les besoins de la cause, une nouvelle conjugaison sur les bi-spineurs, qui transforme χ en un bi-spineur, universellement appelé $\bar{\chi}$ (ne pas confondre avec le complexe conjugué qui n'est d'aucune utilité ici), par :

$$\boxed{\bar{\chi} = \chi^\dagger \gamma^0 = (\chi_R^\dagger, \chi_L^\dagger)} \qquad \text{(VI\_113)}$$

$\bar{\chi}$ est appelé le *conjugué de Dirac* de χ. On définit aussi la matrice 4×4, γ^5 par :

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & \\ & \mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \text{(VI\_114)}$$

Avec ces notations, on a finalement pour les vrai et pseudo- scalaires :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} S = \bar{\chi}\, \psi \\ P = \bar{\chi}\, \gamma^5\, \psi \end{array} \right.} \qquad \text{(VI\_115)}$$

Pour ce qui est des quadri-vecteurs, ça n'est pas plus compliqué. V^μ défini par :

$$\left(V^0 = \chi_L^\dagger \psi_L + \chi_R^\dagger \psi_R \ , \ \vec{V} = -\chi_L^\dagger \vec{\sigma} \psi_L + \chi_R^\dagger \vec{\sigma} \psi_R \right) \qquad \text{(VI\_116)}$$

14. Remarquons que comme deux transformations de parité consécutives redonnent l'identité, une quantité scalaire ne peut qu'être invariante ou transformée en son opposé par parité.

est un vrai quadri-vecteur car sa composante temporelle est invariante et ses composantes spatiales sont inversées comme pour x^μ. Par contre A^μ défini par :

$$\left(A^0 = \chi_L^\dagger \psi_L - \chi_R^\dagger \psi_R \ , \ \vec{A} = -\chi_L^\dagger \vec{\sigma} \psi_L - \chi_R^\dagger \vec{\sigma} \psi_R\right) \tag{VI.117}$$

est un pseudo-vecteur car sa composante temporelle est inversée alors que ses composantes spatiales ne le sont pas (c'est la définition d'un pseudo-quadrivecteur).

Notons qu'évidemment, le produit scalaire (minkowskien) de deux pseudo-vecteurs est un vrai scalaire et que le produit scalaire d'un vrai vecteur par un pseudo-vecteur est un pseudo-scalaire.

On peut réécrire tout cela en fonction des spineurs de Dirac :

$$\begin{cases} V^0 = \chi^\dagger \psi = \bar{\chi} \gamma^0 \psi \\ \vec{V} = \chi^\dagger \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & \\ & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \psi = \bar{\chi} \begin{pmatrix} & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \end{pmatrix} \psi \end{cases} \tag{VI.118}$$

où on s'est servi de $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$. On définit les trois matrices γ^i (avec indice en haut) :

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \end{pmatrix} \tag{VI.119}$$

et on déduit que les vrais vecteurs s'écrivent :

$$\boxed{V^\mu = \bar{\chi} \gamma^\mu \psi} \tag{VI.120}$$

alors que les pseudo-vecteurs font intervenir un γ^5 :

$$\boxed{A^\mu = \bar{\chi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi} \tag{VI.121}$$

En résumé : on a défini les cinq matrices gamma, dites matrices de Dirac :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & \\ & \mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{VI.122}$$

Ces matrices vérifient les relations suivantes qui sont fondamentales (nous verrons en quoi) :

$$\boxed{\begin{cases} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1} \qquad \text{(crucial !!)} \\ \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \\ (\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \\ \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad , \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \quad , \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \end{cases}} \tag{VI.123}$$

où, par définition, $\{A, B\} = AB + BA$ est l'anticommutateur de A et B.

Remarquons que :

$$\frac{\mathbb{1} + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\mathbb{1} - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & 0 \end{pmatrix} \tag{VI.124}$$

Ce sont donc les projecteurs respectivement sur les parties droite et gauche des spineurs de Dirac.

Exercice : En étendant aux matrices γ^μ, les relations (III_86), retrouver le fait que V^μ et W^μ sont des quadri-vecteurs.

A Autres représentations de l'algèbre de Clifford

Nous avons, sans le dire, fait un choix d'écriture pour passer des spineurs à deux composantes aux spineurs de Dirac. En effet, nous avons pris comme composantes du bi-spineur, les composantes des spineurs χ_L et χ_R (et non pas une combinaison de ces composantes). Ce choix était certes licite, mais absolument pas unique. En effet, si on prend une matrice unitaire U, 4×4, ($U \in SU(4)$) et que l'on pose :

$$\begin{cases} \chi' = U\chi \\ \gamma'^{\mu,5} = U\,\gamma^{\mu,5}\,U^\dagger \end{cases} \tag{VI_125}$$

alors :

$$\bar{\chi}' = \chi'^\dagger\gamma'^0 = (U\chi)^\dagger U\gamma^0 U^\dagger = \bar{\chi}U^\dagger = \bar{\chi}' \tag{VI_126}$$

On en déduit donc que

$$\begin{cases} S = \bar{\chi}\psi = \bar{\chi}\,U^\dagger U\,\psi = \bar{\chi}'\psi' \\ \\ V^\mu = \bar{\chi}\gamma^\mu\psi = \bar{\chi}\,U^\dagger U\,\gamma^\mu U^\dagger U\,\psi = \bar{\chi}'\gamma'^\mu\psi' \end{cases} \tag{VI_127}$$

et, chose remarquable, toute l'algèbre des γ^μ, Eq.(VI_123), est inchangée, en particulier

$$\{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}$$

Donc, en fait, c'est cette algèbre qui est fondamentale, les matrices données en (VI_122) n'étant qu'une *représentation* de cette algèbre, appelée représentation de Weyl. Du coup, l'algèbre des matrices gamma a le droit de porter un nom : elle est connue dans la littérature mathématique sous le nom d'algèbre de Clifford.

Toutes les représentations (de dimension 4) de l'algèbre de Clifford peuvent être obtenues à partir de la représentation de Weyl en changeant les matrices γ^μ en $\gamma'^\mu = U\gamma^\mu U^\dagger$ avec U unitaire[15]. Toutes les représentations sont équivalentes mais elles ne sont pas toutes aussi commodes pour ce qui est des calculs. Ainsi la représentation de Weyl est pratique pour les transformations de Lorentz par exemple, et celle de Dirac (voir la suite) pour la limite non

15. Le fait que les spineurs de Dirac soient à quatre composantes pour un espace - temps à quatre dimensions est une pure coïncidence. En dimension D, les spineurs de Dirac ont $2^{[D/2]}$ composantes, où $[D/2]$ signifie partie entière de $D/2$.

relativiste, car deux composantes des bi-spineurs, dans cette représentation, tendent vers zéro dans cette limite.

• **La représentation de Dirac**. Elle est obtenue à partir de celle de Weyl grâce à la matrice U :

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{VI\_128}$$

Les matrices gamma s'écrivent :

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_D^i = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_D^5 = \begin{pmatrix} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \end{pmatrix} \tag{VI\_129}$$

• **La représentation de Majorana**. Elle est obtenue à partir de celle de Dirac par la matrice unitaire :

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\gamma_D^0 \gamma_D^2 + \gamma_D^0 \right) \tag{VI\_130}$$

Dans cette représentation, toutes les matrices γ^μ sont imaginaires pures ce qui est commode pour la conjugaison de charge par exemple.

B Transformations de Lorentz des bi-spineurs

Elles découlent évidemment, en représentation de Weyl, de celle des parties gauche et droite, χ_L et χ_R. Pour les obtenir dans une représentation quelconque, il faut les réécrire en fonction des matrices γ^μ. De façon générale, on doit avoir :

$$\chi' = S(\Lambda)\chi \tag{VI\_131}$$

où $S(\Lambda)$ est la matrice représentant la transformation de Lorentz Λ sur les spineurs de Dirac. Pour une transformation infinitésimale $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu$, on pose par définition des six *matrices* $\sigma^{\mu\nu}$:

$$S = S(\epsilon) = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\, \epsilon_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \tag{VI\_132}$$

$\sigma^{\mu\nu}$ est antisymétrique en μ, ν. En parlant en termes d'éléments de matrice :

$$S_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{i}{4}\, \epsilon_{\mu\nu} \left(\sigma^{\mu\nu}\right)_{\alpha\beta} \tag{VI\_133}$$

En représentation de Weyl, tout est simple :

$$\begin{pmatrix} \chi_L' \\ \chi_R' \end{pmatrix} = \left[\mathbb{1} + i \begin{pmatrix} \left(d\vec{\theta} - id\vec{\phi}\right) . \vec{\sigma}/2 & 0 \\ 0 & \left(d\vec{\theta} + id\vec{\phi}\right) . \vec{\sigma}/2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} \tag{VI\_134}$$

Pour en déduire la transformation dans une représentation générale, on va réécrire cela en fonction des matrices γ^μ. On peut se contenter d'étudier ce qui se passe pour une transformation particulière car, et c'est là toute la force du calcul tensoriel (voir l'appendice I), lorsqu'on sait comment ça marche pour une transformation particulière on en déduit automatiquement l'expression de la transformation générale : c'est la même puisque toutes les composantes sont traitées de façon identique. Prenons comme exemple une rotation autour de Ox : $d\theta_1 \neq 0$ et tous les autres paramètres sont nuls. Dans ce cas :

$$\chi' = \left[\mathbb{1} + \frac{i}{2} d\theta_1 \begin{pmatrix} \sigma_1 & \\ & \sigma_1 \end{pmatrix}\right] \chi \tag{VI\_135}$$

Tout cela n'est pas très covariant. On peut déjà un peu améliorer en prenant $\epsilon_{32} = -\epsilon_{23}$ à la place de $d\theta_1$. Reste le σ_1 à transformer. On a

$$\frac{i}{2}\epsilon_{32} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \\ & \sigma_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\epsilon_{32} \begin{pmatrix} [\sigma_2, \sigma_3] & \\ & [\sigma_2, \sigma_3] \end{pmatrix} \tag{VI\_136}$$

Encore un petit effort et on y sera. Comme on a :

$$\gamma^2\gamma^3 = -\begin{pmatrix} \sigma_2\sigma_3 & \\ & \sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix} \tag{VI\_137}$$

on déduit que :

$$\frac{i}{2} d\theta_1 \begin{pmatrix} \sigma_1 & \\ & \sigma_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\epsilon_{32}\left[\gamma^3, \gamma^2\right] = \frac{1}{8}\left(\epsilon_{32}\left[\gamma^3, \gamma^2\right] + \epsilon_{23}\left[\gamma^2, \gamma^3\right]\right) \tag{VI\_138}$$

où la dernière égalité ne coûte pas chère et est nécessaire si on veut remettre cette expression sous la forme d'une somme, ce que l'on fait maintenant sans problème puisque seuls ϵ_{32} et ϵ_{23} sont non nuls. Par conséquent :

$$\chi' = \left\{\mathbb{1} + \frac{1}{8}\epsilon_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right\}\chi \tag{VI\_139}$$

et cette loi, écrite pour une transformation particulière, est valable quelque soit la transformation puisqu'elle est écrite de façon tensorielle (voir Appendice I). Donc, en résumé, les transformations de Lorentz des spineurs de Dirac dans une représentation quelconque sont données par :

$$\begin{cases} \chi' = S(\Lambda)\chi \\ S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}/2} \quad , \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \end{cases} \tag{VI\_140}$$

où $\Lambda = \exp(-i/2\ \theta_{\mu\nu} J^{\mu\nu})$ avec $J^{\mu\nu}$ le générateur dans la représentation quadri-vectorielle, voir encadré V, page 81.

Et comme dans la suite des événements, nous serons, pour une raison non triviale, intéressés par des champs, il est maintenant temps de passer aux transformations des champs.

VII LES CHAMPS DE SCALAIRES, DE SPINEURS ET DE VECTEURS – GROUPE DE POINCARÉ

A Les champs, les rotations et les transformations de Lorentz

Comme on va être amené à s'occuper de champs, il est bon de se pencher sur la transformation des champs et la définition du caractère tensoriel d'un champ. Commençons par le groupe des rotations.

1 LE CAS EUCLIDIEN

Un champ à n composantes est par définition une fonction f de l'espace de base (euclidien à trois dimensions dans cette discussion, minkowskien à quatre dimensions dans la suite) vers $\mathbb{R}^n$. Une fonction d'onde est un exemple de champ.

On dira qu'un champ est scalaire lorsque $n = 1$ et que pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $f(\vec{x})$ est un scalaire. Dans le point de vue passif, ceci signifie que la valeur de cette quantité ne change pas dans une rotation, seul l'étiquetage des points change :

- point M, champ $f(M)$;
- base B associée à l'observateur $\mathcal{O}$: $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ $\quad f(M) = f_B(x_B, y_B, z_B)$;
- base B' associée à l'observateur $\mathcal{O}'$: $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ $\quad f(M) = f_{B'}(x_{B'}, y_{B'}, z_{B'})$;

où (x_B, y_B, z_B) et $(x_{B'}, y_{B'}, z_{B'})$ sont respectivement les coordonnées de M dans B et dans B'. Le fait que le champ soit scalaire signifiant que sa valeur est identique pour les deux observateurs, on doit avoir :

$$f_B(x_B, y_B, z_B) = f(M) = f_{B'}(x_{B'}, y_{B'}, z_{B'}) \qquad \text{(VII\_141)}$$

Donc, dans le cas d'un champ, les fonctions représentant f, i.e. f_B et $f_{B'}$, ne sont pas identiques car les coordonnées du point M changent d'un observateur à l'autre. Posons par définition :

$$\delta f_B = f_{B'} - f_B$$

qui représente la variation de la *fonction* f_B. On a donc :

$$\delta f_B(x, y, z) = f_{B'}(x, y, z) - f_B(x, y, z) \qquad \text{(VII\_142)}$$

où ici f_B et $f_{B'}$ sont évaluées pour le même triplet (x, y, z). Considérons une rotation infinitésimale autour de Oz d'angle $d\alpha$:

$$\begin{pmatrix} x_{B'} \\ y_{B'} \\ z_{B'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d\alpha & \\ -d\alpha & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} + O(d\alpha^2) \qquad \text{(VII\_143)}$$

On a donc dans ce cas :

$$f_{B'}(x_{B'}, y_{B'}, z_{B'}) = f_{B'}(x_B, y_B, z_B) + d\alpha \left(y_B \frac{\partial}{\partial x_B} - x_B \frac{\partial}{\partial y_B} \right) f_{B'}(x_B, y_B, z_B) \qquad \text{(VII\_144)}$$

Donc en se servant de (VII_141) et de (VII_142) et en raisonnant au premier ordre en $d\alpha$, on obtient :

$$\delta f_B = d\alpha \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) f_B \tag{VII\_145}$$

Posons par définition

$$\boxed{L_i = -i\epsilon_{ijk}x_j\partial_k \quad \Longrightarrow \quad \vec{L} = -i\vec{x} \wedge \vec{\nabla}} \tag{VII\_146}$$

(par exemple $L_x = -i(y\partial_z - z\partial_y)$), alors pour une rotation infinitésimale de paramètre $d\vec{\alpha}$

$$\delta_{d\vec{\alpha}} f_B = i d\vec{\alpha} \,.\, \vec{L}\, f_B \tag{VII\_147}$$

L'algèbre des L_i ne fait pas de mystère puisque c'est juste celle du moment cinétique en mécanique quantique (il est bon de faire le calcul une fois dans sa vie; on fait agir le commutateur sur une fonction test) :

$$[L_x, L_y] = iL_z \tag{VII\_148}$$

et permutations circulaires. C'est l'algèbre de Lie de $SO(3)$. Nous avons donc trouvé une représentation du groupe des rotations en termes de champs scalaires.

Qu'en est il pour les champs vectoriels? On reprend le même raisonnement :

$$V_B^i(x_B, y_B, z_B)\vec{e}_i = \vec{V}(M) = V_{B'}^j(x_{B'}, y_{B'}, z_{B'})\vec{e}_j\,' \tag{VII\_149}$$

Cette relation peut encore se réécrire de la façon suivante :

$$V_{B'}^i(x') = R_{ij}\, V_B^j(x) \tag{VII\_150}$$

Un petit calcul et on trouve que pour une rotation infinitésimale autour de Oz :

$$\begin{pmatrix} \delta V_B^1 \\ \delta V_B^2 \\ \delta V_B^3 \end{pmatrix} = d\alpha(x\partial_y - y\partial_x) \begin{pmatrix} V_B^1 \\ V_B^2 \\ V_B^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} . & d\alpha & . \\ -d\alpha & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_B^1 \\ V_B^2 \\ V_B^3 \end{pmatrix} \tag{VII\_151}$$

Pour chacune des composantes, le premier terme du membre de droite est identique à celui des fonctions scalaires : il rend compte du changement de coordonnées du point M et ne mélange pas ensemble les composantes de $\vec{V}$. Le second terme est identique à la transformation matricielle des composantes d'un vecteur. C'est lui qui signe la nature vectorielle du champ.

En conclusion, on trouve que dans le cas des champs, se superposent la transformation matricielle, caractéristique de la nature tensorielle du champ, et la transformation qui rend compte du changement de coordonnées du point où est évalué le champ :

$$\delta T_i = i \left(d\vec{\alpha} \,.\, \vec{J} \right)_{ij} T_j \quad \text{avec} \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \tag{VII\_152}$$

et où $\vec{L}$, défini précédemment en (VII-146), représente la partie "orbitale" et $\vec{S}$ la partie "intrinsèque" qui est matricielle et qui est choisie pour correspondre à la nature tensorielle du champ : $\vec{S}=\vec{0}$ pour un champ scalaire, $\vec{S}=\vec{\sigma}/2$ pour un champ spinoriel, etc... [16] Pour une rotation finie, la transformation s'écrit :

$$T'_i(\vec{x}) = \left[e^{i\vec{\alpha}\,.\,\vec{J}}\right]_{ij} T_j(\vec{x}) \tag{VII-153}$$

ou encore (voir l'Eq.(VII-150)) :

$$\boxed{T'_i(\vec{x}\,') = \left[e^{i\vec{\alpha}\,.\,\vec{S}}\right]_{ij} T_j(\vec{x})} \tag{VII-154}$$

2 LE CAS MINKOWSKIEN

L'argument précédent se généralise bien entendu à des champs de l'espace de Minkowski et aux transformations de Lorentz. Dans une transformation infinitésimale, Eq.(III-60) :

$$x^\mu_{B'} = x^\mu_B + \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu_B \tag{VII-155}$$

on a, pour un champ scalaire de Lorentz :

$$f_B(x^\mu_B) = f_{B'}(x^\mu_{B'}) \tag{VII-156}$$

$$= f_{B'}(x^\mu_B) + \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu_B\,\partial_\mu f_{B'}(x_B) \tag{VII-157}$$

et donc :

$$\delta f_B = -\frac{1}{2} i\epsilon^{\mu\nu}\,.\,i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) f_B \tag{VII-158}$$

On pose par définition et par analogie avec l'Eq.(III-69) :

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} L_{0x} = i(t\partial_x + x\partial_t) = -iK_x & \text{et idem } K_{y,z} \\ \\ L_{ij} = i(x_i\partial_j - x_j\partial_i) = \epsilon_{ijk}L_k & \end{array} \right. \tag{VII-159}$$

où les L_i sont définis en (VII-146). L'algèbre des $L_{\mu\nu}$ se calcule sans difficulté. On obtient :

$$\left[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] = i\left(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}\right) \tag{VII-160}$$

16. Il ne faut pas confondre le $\vec{J}$ défini ici avec le $\vec{J}$ utilisé dans la première partie de ces notes et défini en (I-8,I-10) du chapitre 2. La même lettre a été utilisée dans les deux cas car c'est l'usage. En (I-8,I-10), il signifiait seulement la partie appelée maintenant intrinsèque et notée $\vec{S}$, car il n'était pas question de partie orbitale à ce moment là (il n'y avait aucune dépendance en $\vec{x}$) : $\vec{L}$ était nul.

On retrouve l'algèbre de Lorentz, Eq.(III_70). Les K_i définis précédemment sont donc les représentants des générateurs des boosts de Lorentz. Ils rendent compte du changement de coordonnées du point M où est évalué le champ, dans un boost. Si l'on effectue un boost sur un champ spinoriel, quadri-vectoriel, etc... cette transformation orbitale — générée par $L_{\mu\nu}$ — est bien sûr accompagnée, comme dans le cas des rotations, d'une transformation "intrinsèque" — générée par $S_{\mu\nu}$ — qui n'est rien d'autre que la transformation matricielle adaptée à la nature tensorielle du champ et qui a été construite lors de notre étude du groupe de Lorentz : $S_{\mu\nu} = 0$ pour un champ scalaire, $S_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}/2$ pour un champ spinoriel, etc...

$$T'_\alpha(x_\rho) = \left[e^{-i\theta_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}\right]_\alpha^{\ \beta} T_\beta(x_\rho) \tag{VII\_161}$$

avec $J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$. Ceci peut aussi se réécrire,

$$\boxed{T'_\alpha(x'_\rho) = \left[e^{-i\theta_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}\right]_\alpha^{\ \beta} T_\beta(x_\rho)} \tag{VII\_162}$$

VIII Les translations et le groupe de Poincaré

A le générateur des translations

Dès que l'on considère des quantités dépendant de la position, on doit se préoccuper de leur comportement dans les translations

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu$$

Cherchons comment l'intrusion de cette nouvelle symétrie bouleverse notre schéma précédent. Pour cela, nous allons devoir chercher l'algèbre de Lie du groupe contenant à la fois les transformations de Lorentz et les translations, puis en chercher les représentations. Ce groupe est appelé le groupe de Poincaré. Il contient 10 paramètres : 3 paramètres de rotation, 3 de boosts et 4 de translation. Il est non compact et non connexe puisqu'il contient le groupe de Lorentz qui ne l'est pas à cause du renversement du temps et de la parité.

Commençons par identifier l'action du générateur des translations sur des champs. C'est trivial car quelque soit la nature tensorielle du champ, une translation agit de façon identique sur toutes les composantes, ou, dit autrement, ne les mélangent pas entre elles (pas de transformation matricielle). On peut donc se contenter d'étudier un champ scalaire, la généralisation à un champ quelconque étant triviale. On a donc, dans une translation passive :

$$\begin{aligned} f_B(x^\mu) &= f_{B'}(x'^\mu = x^\mu + da^\mu) \\ &= f_{B'}(x^\mu) + da^\mu\, \partial_\mu f \end{aligned} \tag{VIII\_163}$$

et donc :

$$\delta f = -da^\mu\, \partial_\mu f \tag{VIII\_164}$$

On pose par définition :

$$\boxed{P_\mu = i\partial_\mu} \tag{VIII\_165}$$

et on en déduit :

$$\delta f = ida^\mu \, P_\mu f \qquad (\text{Taylor} : f(x+a) = e^{a\partial_x} f(x) = e^{-iaP} f(x)) \tag{VIII\_166}$$

Le générateur des translations est donc représenté, *dans son action sur les fonctions de* x^μ, par (i fois) le quadri-gradient. On peut en déduire l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré (la vérifier et se convaincre que “ça ne pouvait être que cela”) :

$$\begin{cases} \left[P_\mu, P_\nu\right] = 0 \\ \left[P_\mu, L_{\rho\sigma}\right] = i\,(\eta_{\mu\rho} P_\sigma - \eta_{\mu\sigma} P_\rho) \end{cases} \tag{VIII\_167}$$

La deuxième relation signifie que P_μ est un opérateur quadri-vectoriel, ce qui ne devrait pas surprendre étant donnée sa définition.

Le fait que P_μ et $L_{\mu\nu}$ ne commutent pas, indique que le groupe de Poincaré n'est pas simplement un produit direct du groupe Lorentz par celui des translations (c'est un produit dit semi-direct). Physiquement parlant, ceci vient de la contraction des longueurs dans les boosts.

Exercice : Montrer que la loi de groupe pour Poincaré est :

$$(\Lambda, a) \,.\, (\Lambda', a') = (\Lambda\Lambda', a + \Lambda \,.\, a') \tag{VIII\_168}$$

On pourrait donc croire que nous avons travaillé en vain en construisant les représentations du groupe de Lorentz, et qu'il faut tout recommencer pour celles du groupe de Poincaré qui doivent être différentes. Heureusement, il n'en est pas tout à fait ainsi et nous allons, pour une grande part, pouvoir nous resservir de ce que nous avons vu précédemment. Cherchons, pour commencer, les opérateurs de Casimir de Poincaré.

B Un premier opérateur de Casimir : $\mathbf{P}^2$

On peut déjà très facilement construire un Casimir de Poincaré : il s'agit de P^2. En effet, en tant que carré d'un opérateur quadri-vectoriel, il est invariant dans les boosts et les rotations et doit donc commuter avec $J^{\mu\nu}$ (le vérifier). Il commute évidemment avec chacun des P^μ et commute donc avec les dix générateurs. Or, comme nous allons le “montrer” maintenant, $P^2 = P^\mu P_\mu$ a comme valeur propre le carré de la masse, m^2, lorsqu'on s'intéresse à un système constitué d'une particule libre, si bien que la masse va servir à étiqueter les représentations du groupe de Poincaré. C'est évidemment différent du groupe de Lorentz et c'est cela qui va introduire quelques nouveautés comme on le verra par la suite.

Cherchons donc les valeurs propres de P^2 pour une particule libre quantique [17]. Notre modèle (inspiré de la mécanique classique) consiste à dire que la particule libre est définie par une quadri-impulsion p^μ dont le carré scalaire est ce que l'on appelle par définition la masse [18] :

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \qquad \text{où } E = \text{énergie et } E^2 = m^2 + \vec{p}^{\,2} \tag{VIII\_169}$$

Considérons une fonction f quelconque, mais non singulière, de p^μ. La contrainte $p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2$ définit dans l'espace des quadri-impulsions, pour $m = 0$, un cône analogue au cône de lumière et pour $m > 0$, un hyperboloïde à deux nappes séparées par ce cône et pour lequel seul la nappe supérieure correspond aux énergies positives. f n'est donc pas définie dans tout l'espace des p^μ, mais seulement sur cet hyperboloïde (en fait, seulement sur la nappe supérieure pour les états à énergie positive). Pour cette raison, il est commode de remplacer f par une fonction u définie sur tout l'espace des impulsions et qui coïncide avec f :

$$\tilde{u}(p) = \delta(p^2 - m^2)\, f(p) \tag{VIII\_170}$$

Cette fonction vérifie évidemment l'équation :

$$(p^2 - m^2)\, \tilde{u}(p) = 0 \tag{VIII\_171}$$

et (VIII_170) en est, en fait, la solution générale comme nous l'enseigne la théorie élémentaire des distributions. Supposons que $\tilde{u}$ soit une fonction suffisamment bien élevée pour être transformable de Fourier [19](toute la théorie des champs est bâtie avec de telles fonctions) :

$$u(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{ip\,.\,x}\, \tilde{u}(p) \tag{VIII\_172}$$

Alors l'équation (VIII_171) implique sur $u(x)$ l'équation dite de Klein-Gordon (le vérifier) :

$$(\partial^2 + m^2) u(x) = 0 \tag{VIII\_173}$$

17. Nous allons considérer comme acquis que l'on peut étendre le formalisme de la mécanique quantique galiléenne au cas des particules libres lorentziennes. On peut effectivement le faire pour les particules libres, mais ça ne marche plus lorsqu'on "branche" une interaction. La raison en est que, sauf exception, on peut alors créer et annihiler des particules et que l'évolution de chacune d'elles n'est par conséquent plus unitaire. C'est pourquoi il faut, dans ce cas, introduire la notion de champs et d'espace de Fock. Le calcul effectué dans ce paragraphe n'est vraiment pas beau car il laisse en suspend beaucoup de questions (qui se résolvent dans le cadre de la théorie des champs). Il a l'avantage d'être simple.

18. Rappel : on travaille dans des unités où $\hbar = 1$ et $c = 1$.

19. C'est là qu'intervient la simplification de considérer une particule quantique : on passe par transformée de Fourier de la position à l'impulsion (en classique, il faudrait considérer tout l'arsenal des crochets de Poisson). Il faut noter que ceci n'est pas innocent pour le temps qui n'est pas la valeur propre d'un opérateur hermitique. Tout cela se résoudra de soi même en théorie des champs.

car, en transformée de Fourier, $\partial_\mu \to ip_\mu$ (le montrer). Par conséquent, l'action de P^2 sur toute fonction de la position d'une particule libre est la multiplication par m^2 : $P^2 = m^2\mathbb{1}$.

Comme nous le verrons dans la suite, *le groupe de Poincaré admet deux Casimirs.* Avant même de construire le second, on peut voir qualitativement comment l'analyse des groupes de Poincaré et de Lorentz vont différer[20]. Suivant la masse de la particule, il y a deux possibilités.

i) Ou on s'intéresse à une particule de masse non nulle et on peut alors, par une transformation de Lorentz, se mettre dans un repère où la particule est au repos. On s'attend, dans ce cas, pour l'essentiel, à retrouver ce que l'on a déjà vu dans le cas galiléen. En particulier, le spin de la particule doit être donné par son comportement dans les rotations.

ii) Ou alors on s'intéresse à une particule de masse nulle, qui se déplace donc à vitesse 1 dans tout référentiel inertiel, et on ne peut jamais la mettre au repos. On s'attend donc, dans ce cas, à avoir des effets ultra-relativistes, probablement nouveaux par rapport au cas galiléen. Rien ne dit que la notion de spin, telle qu'elle a été définie auparavant, soit encore valable.

Nous allons voir dans la suite comment préciser tout cela. Mais d'abord, un peu de vocabulaire . . .

C Notion d'orbite et de groupe d'isotropie

Soit G un groupe agissant sur un ensemble M. On pourra songer par exemple au groupe des rotations et à l'espace euclidien ou au groupe de Lorentz et à l'espace de Minkowski. On appelle orbite d'un point m de M, l'ensemble noté $G.m$ des points transformés de m par G :

$$G.m = \{m' = gm \;/\; g \in G\} \qquad \text{(VIII\_174)}$$

L'orbite, pour $SO(3)$, d'un point de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, autre que l'origine, est la sphère centrée sur l'origine et passant par ce point[21].

On appelle groupe d'isotropie G_m d'un point m de M, l'ensemble des éléments de G qui laissent invariants m (vérifier qu'il s'agit d'un groupe) :

$$G_m = \{g \in G \;/\; gm = m\} \qquad \text{(VIII\_175)}$$

Par exemple, l'ensemble des rotations qui laissent invariants un point de $\mathbb{R}^3$, autre que l'origine, est le groupe $SO(2)$ des rotations autour de l'axe passant par ce point et l'origine (il y a donc

20. L'analyse complète des représentations (projectives ou non) du groupe de Poincaré a été effectuée par Wigner et est techniquement assez compliquée. Nous n'en reproduirons que les résultats les plus physiquement significatifs.

21. Si l'ensemble M est une orbite du groupe, on dit que G agit transitivement sur M. $SO(3)$ agit transitivement sur la sphère.

“autant” de ces $SO(2)$, tous isomorphes, que de points sur la sphère)[22]. Les groupes d'isotropie de l'origine sont pour $SO(3)$ et pour $SO(3,1)$ ces deux groupes tout entier.

D Les représentations massives et de masse nulle de Poincaré

Justifions succinctement ce que nous avons annoncé précédemment quant aux représentations de Poincaré.

i) Si $m \neq 0$, le quadri-vecteur impulsion $(m,0,0,0)$ figure dans l'orbite de p^μ. m est donc le paramètre qui classifie les différentes orbites. La transformation de Lorentz qui permet de passer de p^μ à $(m,0,0,0)$ n'est pas pour autant unique, car $(m,0,0,0)$ possède un groupe d'isotropie non trivial, à savoir tout $SO(3)$[23]. On peut montrer que les représentations de Poincaré sont étiquetées, d'une part *par la masse* m qui étiquette les orbites, et, d'autre part, par la valeur du Casimir du groupe d'isotropie (le petit groupe), c'est à dire *par le spin*[24]. Le groupe de Poincaré possède donc deux Casimirs, comme le groupe de Lorentz. On peut, en fait, construire explicitement le second Casimir. L'idée est de construire un quadri-vecteur qui soit orthogonal à P^μ. Son carré fournit automatiquement un scalaire de Lorentz et qui commute avec P^μ. Un tel vecteur (appelé pseudo-vecteur de Pauli-Lubanski) est par exemple :

$$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} L^{\nu\rho} P^\sigma \qquad \text{(VIII\_176)}$$

où $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur invariant de $SO(3,1)$ complètement anti-symétrique. On peut facilement voir que $W_\mu W^\mu$ commute avec tous les générateurs. Ses valeurs propres sont $-m^2 s(s+1)$.

ii) Lorsque $m = 0$, le petit groupe n'est plus $SU(2)$ comme on peut le voir de la façon suivante. A p_μ, on associe la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} p^0 + p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & p^0 - p^3 \end{pmatrix} \qquad \text{(VIII\_177)}$$

22. A partir d'un point donné m, disons sur l'axe Oz, on peut donc atteindre, par rotation, n'importe quel point m' de la sphère passant par $m : m' = Rm$. Réciproquement, à chacun des points m' de la sphère n'est pas associée une rotation R *unique*, puisque n'importe quelle rotation autour de Oz laisse m invariant : $m' = (R\,.\,r_m)m$, où r_m est n'importe quelle rotation autour de Om. On définit, pour cette raison, l'ensemble quotient $SO(3)/SO(2)$ des classes d'équivalence (à droite) des rotations de $SO(3)$, à une rotation de $SO(2)$ autour de Om près : $SO(3)/SO(2) = \{\dot{R}, R \in SO(3)\}$ avec $\dot{R} = \{R' \in SO(3) \ / \ R' = R\,.\,r_m\}$. Il est alors simple de montrer que chaque point de la sphère est en correspondance unique avec une classe d'équivalence $\dot{R}$ si bien que la sphère peut être identifiée avec $SO(3)/SO(2)$. Ce genre de relations géométriques a d'innombrables applications en physique (physique des particules, mécanique statistique, etc...). En particulier, l'espace de Minkowski peut être identifié avec le quotient du groupe de Poincaré par le groupe de Lorentz (le montrer).

23. On appelle “petit groupe” de p^μ, le groupe d'isotropie d'un représentant quelconque de l'orbite de p^μ. Le petit groupe de p^μ, dans le cas massif, est $SO(3)$.

24. En fait, cette façon de dire les choses n'est, à strictement parler, vraie que dans le cas quantique, où l'on cherche les représentations projectives de Poincaré. Dans ce cas, on doit considérer, non pas les représentations de $SO(3)$, mais ses représentations projectives, i.e. celles de son recouvrement universel $SU(2)$, si bien que les valeurs admissibles du Casimir du groupe d'isotropie sont les $j(j+1)$ avec j entier ou *demi-entier*, voir l'encadré IV. On obtient ainsi tous les spins possibles.

comme on l'avait fait pour la quadri-position. Comme dans ce cas là, les transformations de Lorentz sur p^μ sont réalisées par :

$$P' = MPM^\dagger \qquad \text{avec} \qquad M \in SL(2, \mathbb{C}) \tag{VIII\_178}$$

Un point commode dans l'orbite de p^μ est, pour $m = 0$ et $p^0 > 0$, $p^0 = p^3$, $p^1 = p^2 = 0$. Le groupe d'isotropie de ce point est constitué des matrices M vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{VIII\_179}$$

L'ensemble de ces matrices est le groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & b \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \tag{VIII\_180}$$

On peut facilement montrer, en composant deux de ces matrices, que ce groupe est celui des isométries de l'espace euclidien à deux dimensions (en fait son groupe de recouvrement, car on est parti de $SL(2, \mathbb{C})$) formé des translations (paramètre $b = x+iy$) et des rotations dans le plan (paramètre θ). Il y a donc du nouveau par rapport au cas massif. On devrait en principe étudier les représentations de ce groupe pour en déduire celle du groupe de Poincaré. Le résultat est le suivant : on peut encore définir la notion de spin qui, comme auparavant, prend des valeurs entières et demi-entières. Cependant, la projection du spin sur la direction de l'impulsion de la particule ne peut prendre que les valeurs $-s$ et $+s$. C'est la raison pour laquelle le photon, qui a un spin un, n'a que deux états de spin $+1$ et -1 ce qui, classiquement, se traduit par le fait qu'il n'a que deux états de polarisation et non pas trois. On peut montrer que ceci a comme conséquence que le champ électromagnétique est transverse et n'a pas, du fait de sa masse nulle, de composante longitudinale. Il en va de même pour le graviton qui est de spin 2.

En conclusion, les représentations du groupe de Poincaré, pour des particules élémentaires libres, sont étiquetées par la masse et le spin : c'est la carte d'identité d'une particule libre. Ceci est, en soi, un résultat assez extraordinaire de la théorie des groupes. C'est aussi le point de départ de la théorie des champs. On cherchera, à partir de ces représentations, à construire des équations du mouvement (en fait, des lagrangiens) qui sont covariantes pour le groupe de Poincaré : ces équations sont connues sous les noms d'équations de Klein-Gordon, de Dirac, de Maxwell, etc... Bien sûr, lorsque l'on étudiera les particules en interaction, d'autres nombres "quantiques" viendront s'ajouter : charge, couleur, etc... A ce propos il convient, à mon avis, de faire preuve de prudence. A la suite de Wigner, on appelle communément particule, une représentation du groupe de Poincaré. Ceci est parfaitement justifié dans bien des cas. En effet, très souvent, et c'est la base de la théorie des champs, on étudie la diffusion de particules venant de l'infini et repartant à l'infini et on suppose que lorsque les particules sont éloignées les unes des autres, on peut négliger leurs interactions et les considérer comme libres. On étudie donc la diffusion de particules qui, asymptotiquement, sont libres et s'identifie donc avec une représentation de Poincaré. Cependant, ce schéma repose implicitement sur une hypothèse "perturbative" selon laquelle on peut débrancher "doucement" l'interaction au fur et à mesure que les particules s'éloignent, sans bouleverser qualitativement la physique. Outre qu'il n'est pas évident que l'on puisse négliger l'interaction de la particule avec son propre champ[25], il est franchement douteux que cela marche lorsqu'on a des états liés comme les quarks (ou des électrons appariés par paires de Cooper), qui ne sont jamais isolés les uns des autres (pas de quarks libres asymptotiquement[26]). On est là dans le domaine non perturbatif de la théorie des champs pour lequel, qualitativement, l'interprétation à la Wigner ne marche plus. Bien sûr, comme on ne sait pas partir d'autre chose que de l'analyse de Wigner, on continue, même dans ce cas, à se servir du même type de formalisme, en espérant que le point de départ est toujours correct et que l'aspect non trivial de ces théories émergera d'une analyse non perturbative, si tant est que l'on en soit capable un jour...

IX Les lagrangiens invariants de Klein-Gordon, Dirac et Maxwell

Nous avons maintenant tous les outils pour construire des invariants sous le groupe de Poincaré. Ces invariants vont être les briques à partir desquelles les lagrangiens (plus précisément les actions), et donc la dynamique, seront construits. Qu'une action soit, par définition, un invariant sous le groupe de Poincaré est chose très naturelle, car nous cherchons, en dernier ressort, pour satisfaire à notre appétit de symétrie, des équations du mouvement covariantes sous ce groupe. Or, à partir de l'action, nous sommes capables, via les équations d'Euler-Lagrange, de construire les équations du mouvement et il est facile de se convaincre que si l'action est un scalaire sous Poincaré, les équations du mouvement sont automatiquement covariantes. C'est en fait là que réside tout l'intérêt de l'approche lagrangienne : les symétries — et pas seulement celle de Poincaré — sont incluses automatiquement[27]. Ceci est déjà important pour la symétrie de Poincaré et devient crucial pour l'invariance de jauge.

Nous n'allons pas développer ici la théorie lagrangienne des champs (c'est le sujet d'un futur chapitre de ces notes) mais nous allons d'ores et déjà donner une liste des invariants qui seront des candidats pour former les lagrangiens de la théorie des champs. L'étude du groupe

25. On prétend, grâce à la renormalisation, pouvoir le faire en considérant des particules "habillées".
26. Les quarks sont en fait libres quand ils sont à très courte distance les uns des autres.
27. De plus, les lois de conservation associées à l'existence de symétries continues, données par le théorème de Noether, se construisent très naturellement en fonction du lagrangien.

de Poincaré nous indique que nous devons considérer des objets de *masse et spin définis*. Nous allons donc procéder par ordre croissant de spin.

Mais avant toute chose, une petite remarque. L'invariance par translation, présente dans le groupe de Poincaré, est facile à réaliser, il suffit d'intégrer sur tout l'espace de Minkowski [28] :

$$\mathcal{S} = \int d^4x\, L \tag{IX.181}$$

$\mathcal{S}$ est l'action et L le lagrangien [29]. *Pour obtenir une action invariante sous le groupe de Poincaré, il suffit donc de prendre L scalaire sous Lorentz.* Ceci justifie a posteriori tous les efforts faits pour comprendre Lorentz et ses représentations, indépendamment de Poincaré.

Nous allons maintenant construire des candidats lagrangiens en se souvenant que la somme de deux candidats lagrangiens est un candidat lagrangien.

• **spin 0**. Il s'agit de champs scalaires. Avec un seul champ scalaire ϕ, on peut former comme scalaires de Lorentz : $\phi, \phi^2, \dots \phi^n$ et en ajoutant le gradient : $\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi$ et toutes ses puissances. On peut faire enfin des produits de ces termes : $\phi^n(\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi)^p$. Mis à part le terme linéaire en ϕ (que l'on peut toujours éliminer), les termes les plus simples sont les deux seuls termes quadratiques

$$\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi \quad \text{et} \quad \phi^2$$

Le lagrangien de Klein-Gordon, décrivant une particule de spin 0 et de masse m est fait à partir de ces deux invariants :

$$L_{KG} = \frac{1}{2}\,\partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\,\phi^2 \tag{IX.182}$$

Les termes de degrés plus élevés en ϕ correspondent à des termes d'interaction.

• **spin 1/2**. Il s'agit de champs spinoriels. Avec un champ de bi-spineurs ψ, on peut construire comme invariants $\bar\psi\psi$ et ses puissances et, en faisant intervenir le gradient, $\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ et ses puissances. On peut enfin faire des produits de ces termes. Le lagrangien de Dirac décrivant une particule libre de spin 1/2 et de masse m (et son anti-particule) est le plus simple que l'on puisse imaginer :

$$L_D = i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar\psi\psi \tag{IX.183}$$

Les termes de degrés plus élevés en ψ correspondent à des termes d'interaction.

• **spin 1**. Il s'agit de champs vectoriels. Avec un champ A_μ, on peut construire comme invariants : $A^\mu A_\mu$ et ses puissances et en ajoutant le gradient : $\partial_\mu A_\nu\,\partial^\mu A^\nu$ et $\partial_\mu A_\nu\,\partial^\nu A^\mu$. Pour

28. Il y a tout de même un a priori derrière tout cela, à savoir que l'on veut des théories *locales*, c'est à dire pour lesquelles on s'interdit des produits de champs en des points différents. Une justification pragmatique à cela est que l'on ne sait pas faire de théorie quantique des champs non locales.

29. En fait, il s'agit de la densité de lagrangien, mais l'usage est de dire lagrangien seulement, les risques d'ambiguïté étant faibles.

une raison non triviale, et qui sera explicitée plus tard, on veut, en plus de Poincaré, une invariance supplémentaire, dite de jauge, lorsqu'on considère des particules de spin 1 et de masse nulle, comme le photon. Une transformation de jauge (abélienne... il y en a de non abéliennes) correspond à la transformation du champ A_μ en :

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \tag{IX\_184}$$

où Λ est un champ scalaire. Il est facile de voir (le faire) que le terme en $A^\mu A_\mu$ n'est pas invariant sous cette transformation et que seule la combinaison $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ avec

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

l'est. Le lagrangien de Maxwell donnant la dynamique du champ électromagnétique non couplé à des sources est :

$$L_M = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{IX\_185}$$

le $1/4$ n'étant là que pour assurer ultérieurement la définition habituelle de la charge lorsque A_μ sera couplé aux autres champs. Un terme en A^2, non invariant de jauge, correspondrait à un terme de masse pour le photon.

• On peut s'amuser à trouver des lagrangiens d'interaction invariants de Poincaré. C'est facile. Par exemple, $A^\mu \partial_\mu \phi$ pour un scalaire et un vecteur : pas la bonne dimension, ne conduit pas à un lagrangien invariant de jauge, inutile. Autre essai avec un spineur :

$$A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \tag{IX\_186}$$

A toutes les propriétés requises lorsqu'on transforme de jauge ψ en

$$\psi' = e^{i\Lambda} \psi \tag{IX\_187}$$

Le terme (IX_186) est le terme de couplage électron-photon, par exemple. On pourrait continuer ce jeu, mais on verrait bien vite qu'en prenant des termes de degrés de plus en plus élevés, on peut construire de plus en plus de termes possibles d'interaction. Heureusement, la renormalisation va drastiquement limiter les choix possibles pour n'en laisser que quelques uns. C'est le sujet des chapitres suivants, pas encore tapés...

CHAPITRE 5

Appendices

I Appendice I : Les représentations linéaires et non linéaires et leur intérêt

Il est clair que parmi toutes les représentations d'un groupe, les représentations linéaires sont les plus intéressantes car elles sont les plus simples. Voyons en quelques exemples et voyons en quoi consiste exactement cette simplicité.

Considérons le plan affine rapporté aux axes Oxy et le groupe des rotations $SO(2)$ autour de l'axe Oz perpendiculaire à Oxy. Dans les rotations (passives) de $SO(2)$ autour de Oz, les composantes x et y du vecteur $\vec{r}$, prises indépendamment, n'engendrent pas de représentation de $SO(2)$ alors que le doublet (x, y) engendre une représentation linéaire de ce groupe :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Il en va de même si $\vec{r}$ est normé (et appartient donc au cercle unité)[1] : $x^2 + y^2 = 1$ car cette contrainte est invariante sous les rotations. Par contre, même dans ce cas où y n'est pas indépendant de x, $y = \sqrt{1-x^2}$, x à lui tout seul n'engendre pas une représentation linéaire. Il engendre en fait une représentation non linéaire :

$$x' = T_\theta(x) = \cos\theta\, x \pm \sin\theta \sqrt{1-x^2}$$

Dans toute la suite, pour simplifier la discussion, on ne considérera que les points où x et y sont positifs. On peut montrer qu'il s'agit bien d'une représentation de $SO(2)$ car :

$$\begin{aligned} x'' = T_{\theta'}\left[T_\theta(x)\right] &= \cos\theta'\, x' + \sin\theta'\, y' = \cos(\theta+\theta')\, x \pm \sin(\theta+\theta')\sqrt{1-x^2} && \text{(I\_1)} \\ &= T_{\theta+\theta'}(x) && \text{(I\_2)} \end{aligned}$$

Notons tout de même que la démonstration directe de la relation précédente, i.e. sans passer par y, n'est pas absolument triviale car elle réclame la relation (le vérifier) :

$$\sqrt{1 - (\cos\theta\, x + \sin\theta\sqrt{1-x^2})^2} = -\sin\theta\, x + \cos\theta\sqrt{1-x^2}$$

dont la véracité ne saute pas yeux.

1. On voit ici que les fonctions $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ sont scalaires sous $SO(2)$.

Pour des dimensions plus grandes, on conçoit aisément que cela devienne fort compliqué ! En dimensions trois, on peut aussi facilement fabriquer des représentations non linéaires à partir des coordonnées (x, y, z) (qui engendrent bien entendu une représentation linéaire de $SO(3)$) en considérant, par exemple, les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) qui pour (θ, ϕ) se transforment non linéairement sous $SO(3)$ (le vérifier).

Dans les deux exemples précédents, on voit que l'on peut facilement faire le chemin inverse "sans perdre d'information" et passer des représentations non linéaires aux représentations linéaires : à x on adjoint $y = \sqrt{1 - x^2}$ et (x, y) se transforme linéairement sous $SO(2)$; à (θ, ϕ), on adjoint r et on fait le changement de variables $(x, y, z) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta)$ et on obtient une représentation linéaire de $SO(3)$. Ceci est il toujours le cas ? Peut on toujours construire une représentation linéaire "physiquement équivalente" à une représentation non linéaire ? Je ne le sais pas et je souhaiterais qu'un lecteur cultivé m'éclaire.

Voyons maintenant au delà de la simplicité des transformations, l'intérêt des représentations linéaires.

A Equations covariantes et calcul tensoriel

Considérons l'espace euclidien et un système de coordonnées sphériques dans cet espace. Soient deux vecteurs normés $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de composantes sphériques $(1, \theta_A, \phi_A)$, $(1, \theta_B, \phi_B)$. La quantité

$$Q(\theta_A, \ldots, \phi_B) = \cos\theta_A \cos\theta_B + \sin\theta_A \cos\phi_A \sin\theta_B \cos\phi_B + \sin\theta_A \sin\phi_A \sin\theta_B \sin\phi_B$$

est elle un scalaire sous $SO(3)$? La réponse à cette question, pour anodine qu'elle semble être, est révélatrice de la pertinence du choix de représentation. Si l'on veut faire le calcul sans réfléchir, il faut calculer $(\theta'_{A,B}, \phi'_{A,B})$, transformés de $(\theta_{A,B}, \phi_{A,B})$ dans une rotation quelconque, calculer $Q(\theta'_A, \ldots, \phi'_B)$ et comparer avec $Q(\theta_A, \ldots, \phi_B)$. Par contre, il est trivial de voir que A_i et B_i étant les composantes cartésiennes de $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$$Q' = \sum_i A_i B_i$$

est scalaire. En fait, $Q = Q' = \vec{A} \,.\, \vec{B}$, si bien que Q' est scalaire même si ça ne saute pas aux yeux en composantes sphériques. Il serait encore plus difficile de voir que l'équation :

$$\vec{F} = \frac{\vec{A} . \vec{B}}{(\vec{C} . \vec{D})^2} \vec{E}$$

une fois écrite en composantes sphériques, forment bien un ensemble de trois équations covariantes sous $SO(3)$, c'est à dire sont des équations entre deux objets de même caractère tensoriel, ici deux vecteurs. Au contraire, il est trivial de voir qu'il en est ainsi pour

$$F_k = \frac{A_i B_i}{(C_j D_j)^2} E_k \tag{I-3}$$

car

Une équation est covariante, en composantes cartésiennes, si et seulement si les indices sont équilibrés entre les deux membres.

Ceci signifie que les indices sommés le sont conformément à la convention d'Einstein et que les indices libres sont identiques entre les deux membres [2]. C'est là le deuxième avantage des représentations linéaires : il est possible d'inventer un système de notations — un calcul tensoriel — tel que la covariance des équations soit explicite et évidente. Il faut noter aussi, c'est un corollaire, que dans ces notations, il est évident que *les équations covariantes sont invariantes de forme* sous les transformations du groupe. Ceci signifie dans l'exemple précédent, que si (I-3) est vérifiée dans un repère, alors, dans des notations évidentes, on a pour tout autre repère obtenu par rotation à partir de celui ci :

$$F'_k = \frac{A'_i B'_i}{(C'_j D'_j)^2} E'_k \tag{I-4}$$

Les équations covariantes sont d'ailleurs aussi invariantes de forme en composantes sphériques, mais il est très difficile de le savoir a priori.

Exercice : Se convaincre que seules les équations covariantes sous un groupe de symétrie G sont admissibles pour écrire une loi invariante sous G.

Un autre avantage des représentations linéaires est que, connaissant une équation physique vérifiée par une composante d'un tenseur, on peut, en l'écrivant sous forme tensorielle, obtenir la loi vérifiée par toutes les autres composantes. Ceci vient, bien entendu, du fait que toutes les composantes jouent un rôle équivalent (elles sont échangées par les symétries) et doivent donc obéir aux mêmes équations. De même, *si l'on connaît une loi écrite dans un repère particulier, on peut, en l'écrivant de façon tensorielle, l'obtenir dans un repère quelconque.* Prenons par

2. Il en va de même dans un espace de Minkowski.

exemple les transformations de Lorentz suivant Ox :

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{I\_5}$$

avec $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ et $\vec{\beta} = \vec{v}$ ($c = 1$ dans ces unités) est la vitesse du deuxième repère par rapport au premier. Cherchons à déduire de ce qui précède la transformation de Lorentz suivant une direction quelconque. Comme l'axe Ox n'est pas privilégié — isotropie de l'espace — on s'attend, connaissant (I_5) à pouvoir en déduire la transformation de Lorentz suivant une direction quelconque grâce à l'invariance par rotation et à la manipulation de tenseurs de $SO(3)$. On réécrit donc les trois dernières équations de (I_5) de façon telle que l'invariance par rotation soit manifeste :

$$\begin{cases} x' = x + (\gamma - 1)x - \gamma\beta t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x' = x + (\gamma - 1)\vec{r}\,.\,\frac{\vec{\beta}}{\beta} - \gamma\beta t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{I\_6}$$

car, pour cette transformation le long de Ox, $x = \vec{r}\,.\,\vec{\beta}/\beta$. Donc pour cette transformation,

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + (\gamma - 1)\vec{r}\,.\,\frac{\vec{\beta}}{\beta} - \gamma\vec{\beta}t$$

Maintenant, l'invariance par rotation et le fait que nous n'utilisons que des tenseurs de $SO(3)$, en l'occurrence ici que des vecteurs et des scalaires, nous assurent que cette expression est valable pour tout $\vec{\beta}$! C'est évidemment beaucoup plus commode que d'effectuer brutalement le calcul ! (voir aussi le calcul page(95) pour un autre exemple).

On peut aussi se servir de l'invariance par rotation pour prédire des formes d'équation. Ainsi, le champ d'un dipôle électrique s'écrit :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{p}\,.\,\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right)$$

et étant vectoriel, linéaire en $\vec{p}/4\pi\epsilon_0$ et de dimension $p/4\pi\epsilon_0 r^3$ ne peut que s'écrire :

$$\vec{E} = \alpha\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \beta\frac{(\vec{p}\,.\,\vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^5}\vec{r}$$

où α et β sont des constantes numériques qui ne peuvent être déterminées que par calcul direct (pourquoi un terme en $\vec{p} \wedge \vec{r}$ est il interdit ?).

Terminons par un truc de calcul très commode en particulier en physique des particules : l'intégration symétrique. Supposons que l'on doive calculer l'intégrale en dimension D, supposée convergente :

$$I = \int d^D k\ k^i k^j\ f(\vec{k}^2, m)$$

Exercice : Sachant que dans une transformation de Lorentz, le champ électrique se transforme en :

$$\begin{cases} E'_{\parallel} = E_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \wedge \vec{B}\right) \end{cases}$$

où $E_{\parallel}$ et $\vec{E}_{\perp}$ sont respectivement les composantes parallèle et perpendiculaire de $\vec{E}$ suivant la direction de $\vec{\beta}$ et où $\vec{B}$ est le champ magnétique, se convaincre que l'invariance par rotation assure que ces relations peuvent se réécrire de manière entièrement vectorielle, i.e. sans faire appel au choix d'axes précédents qui privilégie la direction $\vec{\beta}$. Montrer alors en complétant astucieusement les relations précédentes que

$$\vec{E}\,' = \gamma \vec{E} + \frac{1-\gamma}{\beta^2}(\vec{\beta}\,.\,\vec{E})\vec{\beta} + \gamma \vec{\beta} \wedge \vec{B}$$

Exercice : Trouver le champ magnétique $\vec{B}$ créé par un moment magnétique sachant que :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \left(\mu \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3}\right)$$

$\vec{B}$ et $\vec{m}$ sont des pseudo-vecteurs.

où m désigne un ou un ensemble de paramètres *scalaires.* $\vec{k}$ étant une variable d'intégration, il est clair que I n'en dépend pas. Or, comme I dépend de façon symétrique de deux indices vectoriels et comme il n'y a qu'un seul tenseur symétrique à deux indices, le tenseur métrique δ^{ij} (ou, dans le cas minkowskien η^{ij}), on doit obligatoirement avoir :

$$I = \alpha\, \delta^{ij} \tag{I\_7}$$

Le calcul de α est en général plus simple que celui I car par contraction de (I_7) avec δ^{ij} on obtient ($\delta^{ij}\delta^{ij} = \mathrm{Tr}\mathbb{1} = D$)

$$\alpha = \frac{1}{D} \int d^D k\ \vec{k}^2\ f(\vec{k}^2, m)$$

Par le même raisonnement, on montre que

$$\int d^D k\ k^{i_1} \dots k^{i_{2j+1}}\ f(\vec{k}^2, m) = 0$$

et pour quatre variables k^i par exemple :

$$\int d^D k\ k^{i_1} \dots k^{i_4}\ f(\vec{k}^2, m) = \gamma\left(\delta^{i_1 i_2}\delta^{i_3 i_4} + \delta^{i_1 i_3}\delta^{i_2 i_4} + \delta^{i_1 i_4}\delta^{i_2 i_3}\right)$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{D(2+2D)} \int d^D k \ (\vec{k}^2)^2 \ f(\vec{k}^2, m)$$

Exercice : Montrer que

$$\int d^2\hat{r} \frac{(\vec{B}\,.\,\hat{r})^2}{(1-\vec{A}\,.\,\hat{r})^5} = \vec{B}^2\, g(\vec{A}^2) + (\vec{A}\,.\,\vec{B})^2 h(\vec{A}^2)$$

II APPENDICE II : THÉORIE DES CARACTÈRES POUR LES GROUPES FINIS

Nous allons dans cet appendice mentionner quelques résultats propres à la théorie des groupes finis qui sont importants dans le contexte de la physique atomique, moléculaire, nucléaire, etc... et qui montrent, sur des exemples simples, des techniques de calcul qui se retrouvent de façon presque identique pour les groupes de Lie *compacts* comme le groupe des rotations.

• La somme des carrés des dimensions d_l des représentations irréductibles est égale au cardinal h — appelé aussi ordre — du groupe :

$$\sum_l {d_l}^2 = h \tag{II_8}$$

Pour C_{3v} : $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$.

• On dit que deux éléments g et g' d'un groupe sont conjugués s'il existe un élément f du groupe tel que :

$$g' = f^{-1}\, g\, f \tag{II_9}$$

La signification de la conjugaison est que g et g' sont de "même type" s'ils sont conjugués. Plus précisément, dans l'exemple de C_{3v}, les deux rotations sont conjuguées et les trois symétries miroir le sont aussi (le montrer). On a par exemple : $R_2 = S_A^{-1} R_1 S_A$. Le fait que l'on passe ainsi de R_1 à R_2 vient simplement de ce que R_2 est une rotation d'angle $-2\pi/3$ et qu'une symétrie miroir change le sens de rotation. De même, le fait que l'on passe par conjugaison d'une symétrie miroir à une autre indique seulement que l'on passe d'un plan miroir à un autre par rotation de $2\pi/3$ ou $4\pi/3$. La relation de conjugaison étant une relation d'équivalence (le vérifier), l'ensemble des classes d'équivalence, dites classes de conjugaison, forme une partition du groupe.

• On peut montrer que le nombre de classes de conjugaison (trois pour C_{3v}) est égal au nombre de représentations irréductibles. Pour le groupe des rotations, les classes de conjugaison sont formées des rotations de même angle. On peut comprendre ainsi qu'il y a une infinité de représentations irréductibles pour $SO(3)$.

• On appelle caractère de la matrice $T_l(g)$, représentant l'élément g d'un groupe dans la l-ième représentation irréductible, la trace de cette matrice :

$$\chi_l(g) = \mathrm{Tr}\,(T_l(g)) \tag{II\_10}$$

Cette définition s'étend trivialement aux représentations réductibles. Il est clair à partir des définitions précédentes que le caractère est une constante à l'intérieur d'une classe de conjugaison.

On notera $\vec{\chi}_l$ le vecteur à h composantes : $(\chi_l(g_1), \ldots, \chi_l(g_h))$. La relation "d'orthogonalité" suivante constitue le résultat fondamental de la théorie des caractères :

$$\vec{\chi}_{l'}{}^{*} \cdot \vec{\chi}_l = h\,\delta_{ll'} \tag{II\_11}$$

(Il peut arriver que les matrices d'une représentation, et donc les caractères, soient complexes).

Si une représentation $\{T(g)\}$, de caractère $\vec{\chi}$, est réductible et s'écrit :

$$T(g) = \sum_l a_l T_l(g) \tag{II\_12}$$

où il s'agit d'une somme directe sur les représentations irréductibles $\{T_l(g)\}$ du groupe, alors, par application directe de (II_11), on obtient que le nombre de fois que la l-ième représentation irréductible apparaît dans la décomposition de T est :

$$a_l = \frac{1}{h}\,\vec{\chi}_l{}^{*} \cdot \vec{\chi} \tag{II\_13}$$

III APPENDICE III : TRANSFORMATION DES SPINEURS CLASSIQUES

Nous allons voir dans cet appendice que si un système classique est décrit par un doublet, il s'agit obligatoirement d'un spineur pour $SO(3)$. Tout cet appendice peut être considéré comme un exercice, les spineurs classiques n'étant guère intéressants en physique.

Considérons donc deux observateurs vivant dans l'espace de base tri-dimensionnel et auxquels sont associées deux bases $\{\vec{e}_i\}$ et $\{\vec{e}\,'_i\} = \{R\vec{e}_i\}$, R étant une matrice de rotation. Ces deux observateurs étudient le même système physique qui, par hypothèse, est décrit par un doublet. Nous allons étudier comment passer de la formulation de l'un des observateurs à celle de l'autre (point de vue passif). Comme nous avons montré qu'il était loisible de le faire, nous supposerons que chacun des observateurs a pris comme représentation matricielle des générateurs des rotations autour de ses propres axes (une demi fois) les matrices de Pauli (voir page 39). Ces choix fixent entièrement un choix de base de l'espace $\mathbb{C}^2$ pour chacun des observateurs, à savoir $|\pm, z\rangle$ et $|\pm, z'\rangle$. Notre choix de base signifie matriciellement :

$$\left(\sigma^{(z')}_{e'_i}\right)_{\alpha\beta} = \langle \alpha, z'|\sigma_{e'_i}|\beta, z'\rangle = \left(\sigma^{(z)}_{e_i}\right)_{\alpha\beta} = \langle \alpha, z|\sigma_{e_i}|\beta, z\rangle \qquad \text{(III\_14)}$$

Appelons U la matrice de $SU(2)$ qui fait le passage des générateurs autour des $\vec{e}_i$ à ceux autour des $\vec{e}\,'_i$, Eq.(II_41) :

$$\sigma^{(z)}_{e'_z} = R_{3j}\sigma^{(z)}_{e_j} = U^{-1}\sigma^{(z)}_{e_z}U \qquad \text{(III\_15)}$$

et appelons V la matrice qui fait le passage de la base des $|\beta, z\rangle$ aux $|\alpha, z'\rangle$:

$$|\alpha, z'\rangle = V_{\alpha\beta}|\beta, z\rangle \qquad \text{(III\_16)}$$

Comme on peut toujours prendre ces bases orthonormées puisque les générateurs sont hermitiens, V est elle aussi unitaire et de déterminant unité : $V \in SU(2)$. Notons que l'on a par définition du produit scalaire sesquilinéaire habituel dans les espaces de Hilbert complexes :

$$\begin{aligned} \langle \gamma, z|\alpha, z'\rangle &= V_{\alpha\gamma} \\ \langle \alpha, z'|\gamma, z\rangle &= \bar{V}_{\alpha\gamma} \end{aligned} \qquad \text{(III\_17)}$$

Tout doublet $|Z\rangle$ peut se décomposer sur l'une ou l'autre base :

$$|Z\rangle = Z_\alpha|\alpha, z\rangle = Z'_\alpha|\alpha, z'\rangle \qquad \text{(III\_18)}$$

Montrons que le passage des Z_α aux Z'_β se fait grâce à la matrice U de $SU(2)$. Pour trouver la relation entre Z_α et Z'_β on va imposer (III_14). Partons de

$$\left(\sigma^{(z')}_{e'_i}\right)_{\alpha\beta} = \left(\sigma^{(z)}_{e_i}\right)_{\alpha\beta} \implies \langle \alpha, z'|\sigma_{e'_i}|\beta, z'\rangle = \langle \alpha, z'|U^{-1}\sigma_{e_z}U|\beta, z'\rangle \qquad \text{(III\_19)}$$

et insérons quelques relations de fermeture

$$\begin{aligned} \langle \alpha, z'|\sigma_{e'_z}|\beta, z'\rangle &= \sum_{\gamma,\delta,\epsilon,\rho} \langle \alpha, z'|\gamma, z\rangle\ \langle \gamma, z|U^{-1}|\delta, z\rangle\ \langle \delta, z|\sigma_{e_z}|\epsilon, z\rangle\ \langle \epsilon, z|U|\rho, z\rangle\ \langle \rho, z|\beta, z'\rangle \\ &= \sum_{\gamma,\delta,\epsilon,\rho} \bar{V}_{\alpha\gamma}U^{-1}_{\gamma\delta}\left(\sigma^{(z)}_{e_i}\right)_{\delta\epsilon}U_{\epsilon\rho}V_{\beta\rho} \end{aligned} \qquad \text{(III\_20)}$$

Cette équation n'est compatible avec (III_14) que pour $U = \bar{V}$. En reportant dans (III_18) on trouve

$$|Z\rangle = Z_\alpha|\alpha, z\rangle = Z'_\beta\left({}^tU^{-1}\right)_{\beta\alpha}|\alpha, z\rangle \qquad \text{(III\_21)}$$

soit

$$Z'_\alpha = U_{\alpha\beta} Z_\beta \tag{III\_22}$$

Par conséquent, et comme on pouvait s'en douter, les coordonnées d'un doublet se transforment par $SU(2)$ lors des rotations dans l'espace de base.

Il faut remarquer de nouveau que si l'on tourne continûment de 0 à 2π les axes du second observateur dans l'espace de base, les coordonnées du doublet ne reviennent pas à l'identique mais sont changées de signe. Ce n'est qu'au bout d'une rotation de 4π qu'elles se retrouvent à l'identique. Il est par conséquent douteux que les spineurs soient nécessaires dans le cadre classique ou, sauf exception, on n'a jamais affaire à des objets pour lesquels les rotations de 2π et de 4π soient discernables. De tels objets existent pourtant bel et bien, mais ils ne sont jamais élémentaires. Un exemple fameux et souvent cité est celui du bras et de la main, paume tournée vers le ciel, qui après un tour présente une torsion et qui au bout de deux tours n'en présente plus. On peut montrer en toute généralité qu'on ne peut pas construire un compteur des rotations (fait d'engrenages, d'aiguilles, de poulies, etc...) de l'espace tri-dimensionnel qui fonctionne modulo plus de 4π.

Les choses se présentent assez différemment dans le monde quantique *y compris pour des particules élémentaires* et ce pour une raison non triviale exposée dans l'encadré IV. En effet, on montre page 51 que, dans le cadre quantique, les transformations dans l'espace de base induisent des transformations des vecteurs d'état de l'espace de Hilbert *même dans le point de vue passif*, contrairement au cas classique. Ceci vient du fait qu'un vecteur d'état n'est pas directement associé à une quantité mesurable — qui sont les valeurs moyennes d'opérateurs — contrairement à un vecteur classique comme une position $\vec{x}$, un champ électrique ou magnétique, etc... Les transformations sont donc différentes de ce qui est présenté ici. Le théorème de Wigner indique comment procéder.

Notons enfin que dans le point de vue passif, le fait que les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ ou d'un tenseur T *classique* engendrent des représentations de $SO(3)$ est synonyme de l'existence "d'êtres géométriques" $\vec{V}, T$ qui sont *intrinsèques, i.e. indépendants d'un quelconque système de coordonnées.* Cette notion d'objets géométriques se retrouvent de façon identique dans l'espace de Minkowski, sous la forme de quadrivecteurs, quadritenseurs, etc... ainsi que dans les espaces de Riemann servant de cadre conceptuel à l'étude de la gravitation.

IV APPENDICE IV : POINTS DE VUE ACTIFS

Nous allons retrouver dans le cadre quantique et dans les deux points de vue actifs, les résultats déjà dérivés dans le texte dans le point de vue passif, page 55 et suivantes. Nous donnerons finalement un récapitulatif des quatre points de vue.

Il y a deux points de vue actifs.

• Le premier consiste à prendre deux observateurs $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ et deux systèmes *identiques* S et S' tels que *initialement* $\mathcal{O}$ est relié à S de la même façon que $\mathcal{O}'$ est relié à S'.

Ceci signifie que les systèmes étant identiques, ils sont caractérisés par le même ensemble irréductible d'opérateurs et ont donc le même espace de Hilbert (ou des espaces de Hilbert isomorphes que l'on peut par conséquent confondre).

A t_0, les systèmes étant dans des situations identiques relativement à leur observateur respectif, i.e. que les opérateurs de l'ensemble irréductible ont même valeur moyenne, le même ket $|\psi\rangle$ peut être choisi par chacun des observateurs à cet instant pour décrire son système. Ultérieurement ils mesureront le même jeu de probabilités de transition (donnés par les mêmes états de leurs appareils de mesure) et déclareront qu'une symétrie les relie si ces valeurs moyennes sont toujours égales :

$$|\langle\chi_f|T(t,t_0)|\psi\rangle|^2 = |\langle\chi_f|T'(t,t_0)|\psi\rangle|^2 \tag{IV\_23}$$

où $T(t,t_0)$ et $T'(t,t_0)$ sont respectivement les opérateurs d'évolution utilisés par $\mathcal{O}$ pour décrire l'évolution de S et par $\mathcal{O}'$ pour décrire celle de S'. Si ceci est vrai pour tout $|\psi\rangle$ et tout $|\chi_f\rangle$, on déduit qu'à une une phase près, que l'on peut montrer être inessentielle, T doit être égal à T'. Montrons que cette condition est bien identique à celle trouvée dans le point de vue passif.

Remarquons d'abord que pour l'observateur $\mathcal{O}'$ par exemple, les deux systèmes S et S' sont identiques et ne diffèrent que par leurs conditions initiales (ils ne sont pas au même point ou pas orientés de la même façon, etc...). Ils ont donc, pour cet observateur, le même opérateur d'évolution $T'(t,t_0)$. Il en va de même évidemment pour $\mathcal{O}$ qui emploie le même opérateur d'évolution $T(t,t_0)$ pour décrire les évolutions de S et de S'. Or si l'on raisonne maintenant à système donné, disons S, c'est à dire que l'on oublie momentanément S', alors on se retrouve dans le point de vue passif où les deux observateurs décrivent le même système S. On sait de notre analyse précédente que les opérateurs d'évolution utilisés par les deux observateurs pour décrire l'évolution de S ne sont pas a priori égaux et sont reliés par $T'(t,t_0) = U(t)T(t,t_0)U^\dagger(t_0)$ où U est défini comme précédemment et est l'opérateur, défini dans le point de vue passif, qui fait passer des kets utilisés par $\mathcal{O}$ à ceux utilisés par $\mathcal{O}'$. En revenant maintenant à notre point de vue actif et compte tenu de ce qui a été établi précédemment, on déduit que l'opérateur d'évolution de S' utilisé par $\mathcal{O}'$ est $T'(t,t_0) = U(t)T(t,t_0)U^\dagger(t_0)$. La condition pour avoir une symétrie est donc :

$$T(t,t_0) = U(t)T(t,t_0)U^\dagger(t_0) \tag{IV\_24}$$

comme dans le point de vue passif. Remarquons, dans ce cas, qu'à tout instant, les kets décrivant les systèmes S et S', respectivement dans la description de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$, sont égaux, puisqu'ils sont égaux à t_0 et ont même opérateur d'évolution :

$$|\psi'_{S'}(t)\rangle = |\psi_S(t)\rangle \tag{IV\_25}$$

C'est bien ce à quoi on s'attend intuitivement. La même analyse que dans le cas passif peut donc s'obtenir ici en particulier l'existence de quantités conservées.

• Le deuxième point de vue actif — et qui est le plus souvent employé — consiste à prendre un seul observateur $\mathcal{O}$ et deux systèmes S et S' transformés l'un de l'autre. Il s'obtient à partir du premier point de vue actif en éliminant l'observateur $\mathcal{O}'$. Il faut se souvenir qu'évidemment les appareils de mesure de S' sont transformés eux aussi par rapport à ceux mesurant S (on a par exemple deux expériences identiques l'une tournée vers la Mecque et l'autre tournée vers Jérusalem). La condition pour avoir une symétrie est que les résultats des mesures faites sur l'un des systèmes soient identiques à celles faites sur l'autre.

Revenons pour un instant au premier point de vue actif. On a comme relation entre les kets attribués par $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ au système S' :

$$|\psi_{S'}(t)\rangle = U^{-1}(t)|\psi'_{S'}(t)\rangle = U^{-1}(t)|\psi_S(t)\rangle \qquad \text{(IV\_26)}$$

La dernière égalité n'étant vraie que pour une symétrie. Par ailleurs, il existe une relation analogue entre les kets d'états attribués, cette fois-ci par un même observateur, aux états des appareils de mesure attachés à S et S'. En effet, comme $\mathcal{O}$ attribue aux états physiques des appareils de mesure de S, les mêmes kets $|\chi_f\rangle$ que $\mathcal{O}'$ attribue à ceux de S', on déduit que $\mathcal{O}$ attribue aux états physiques des appareils de mesure de S', les kets $U^{-1}(t)|\chi_f\rangle$. La condition de symétrie entre les deux systèmes s'obtient en disant que les probabilités de transition sont identiques pour les deux systèmes :

$$|\left(\langle\chi_f|U(t)\right)|T(t,t_0)|\left(U^{-1}(t_0)|\psi\rangle\right)|^2 = |\langle\chi_f|T(t,t_0)|\psi\rangle|^2 \qquad \text{(IV\_27)}$$

(ne pas oublier que les deux systèmes ont pour $\mathcal{O}$ le même opérateur d'évolution). Cette condition redonne la condition de symétrie déjà obtenue dans les autres points de vue :

$$T = UTU^{-1} \qquad \text{(IV\_28)}$$

Comme on peut s'en convaincre facilement, cette relation signifie aussi que le transformé de l'évolué dans le temps est l'évolué du transformé ou dit autrement que les deux systèmes évoluent de façon absolument parallèle et que pour passer de l'un à l'autre à n'importe quel instant, il suffit d'employer l'opérateur $U^{-1}(t)$.

Une remarque finale sur les points de vue actif. Le premier point de vue actif est (inconsciemment ?) employé en physique à chaque fois qu'un laboratoire refait une expérience déjà effectuée dans un autre laboratoire et compare ses résultats. Cependant, il faut faire attention que ce point de vue actif peut ne pas exister du tout lorsque, précisément, la transformation étudiée n'est pas une symétrie. Que l'on songe au neutrino qui n'existe que sous la forme gauche.

L'expérience miroir que l'on chercherait à faire pour tester, dans le point de vue actif, la symétrie de parité, n'existe pas puisque, justement, la physique des neutrinos n'est pas invariante par parité et que les neutrinos droits n'existent pas. En ce sens, le fait que le point de vue actif n'existe pas dans ce cas est en soi une preuve de la non invariance par parité de l'interaction faible. Le point de vue passif reste lui possible même dans ce cas. Cependant, il existe des cas où c'est le point passif qui n'existe pas. Si, par exemple, S est au delà de l'horizon cosmologique de $\mathcal{O}'$, celui ci n'a aucun moyen de l'étudier.

A Récapitulatif

Nous allons maintenant donner un résumé des différents points de vue et résultats dans le cas d'une symétrie. On pourra s'imaginer que la transformation dont on parle est une rotation, mais n'importe quelle symétrie fait l'affaire.

Dans le cas d'une symétrie, nous avons, à chaque instant, les relations suivantes entre les différentes descriptions :

$$|\psi'_S\rangle = U|\psi_S\rangle \tag{IV\_29}$$

où les notations choisies sont telles que, par exemple, $|\psi'_S\rangle$ est le ket attribué par $\mathcal{O}'$ au système S. Cette relation vient directement du théorème de Wigner. Nous avons évidemment aussi

$$|\psi'_{S'}\rangle = U|\psi_{S'}\rangle \tag{IV\_30}$$

puisque la relation (IV_29) est génériquement vraie entre les kets attribués par $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ au même système. Pour une symétrie, on peut toujours prendre (à une phase inessentielle près) pour tout t :

$$|\psi'_{S'}(t)\rangle = |\psi_S(t)\rangle \tag{IV\_31}$$

puisque les systèmes évoluent, relativement à leur observateur respectif, exactement de la même façon. On déduit de ces relations :

$$|\psi_{S'}\rangle = U^{-1}|\psi_S\rangle \tag{IV\_32}$$

qui est la relation utile dans le second point de vue actif. Le fait que ce soit U^{-1} qui intervient dans ce cas est tout à fait normal : ceci signifie simplement, dans le cas d'une rotation par exemple, qu'une rotation passive — i.e. du repère — d'un angle $\vec{\theta}$ est équivalente à une rotation active — i.e. du système — d'un angle $-\vec{\theta}$.

Dans ces conventions, et pour une symétrie, l'opérateur utilisé par $\mathcal{O}'$ et mesuré par un appareil de mesure lié à S', $A'_{S'}$, est identique à celui utilisé par $\mathcal{O}$ et mesuré par un appareil de mesure lié à S, A_S :

$$A'_{S'} = A_S \tag{IV\_33}$$

Ceci est clair compte tenu de (IV_31) puisque les deux systèmes et les deux observateurs sont totalement symétriques et que par conséquent :

$$|\langle\psi'_{S'}|A|\psi'_{S'}\rangle| = |\langle\psi_S|A|\psi_S\rangle| \qquad \text{(IV\_34)}$$

Compte tenu de (IV_31) et de (IV_32) on déduit de la relation précédente :

$$|\langle\psi_{S'}|U^{-1}AU|\psi_{S'}\rangle| = |\langle\psi_S|A|\psi_S\rangle| \qquad \text{(IV\_35)}$$

Bien sûr, le membre de gauche représente toujours la mesure effectuée par les appareils liés à S' sur le système S'. Etant pris entre les états attribués par $\mathcal{O}$ au système S', l'opérateur $U^{-1}AU$ est l'opérateur utilisé par $\mathcal{O}$ et mesuré par les appareils liés à S' :

$$A_{S'} = U^{-1}A_S U \qquad \text{(IV\_36)}$$

qui n'est rien d'autre, dans le cas général, que l'équation (V_55) (la dérivation donnée ici est différente de celle donnée dans le texte).

CHAPITRE 6

Quand on a tout oublié

Je suis sûr, tacites amis, tous nous le sommes,
Qu'il n'est qu'une vengeance et qu'il n'est qu'un pardon
Et c'est l'oubli. Quelque divinité fit don
De cette étrange clé à la haine des hommes.
J.L. Borges

Un groupe $\simeq$ une table de multiplication (loi interne).

Un groupe de Lie $\simeq$ groupe dont les éléments dépendent continûment d'un ou plusieurs paramètres et tel que la loi de composition et l'inversion soient des fonctions analytiques des paramètres. Exemple : $SO(3) = \{R(\vec{\theta})\}$.

Algèbre de Lie et générateurs. Pour $SO(3)$ par exemple :

$$J_i = i \left.\frac{d\,R(\vec{\theta})}{d\theta_i}\right|_{\vec{\theta}=\vec{0}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad R(d\vec{\theta}) = 1\!\!1 + i d\vec{\theta}\,.\,\vec{J}$$

On choisit souvent, en pratique, des générateurs hermitiques. C'est le cas pour les J_i et les générateurs du groupe de Lorentz (boosts + rotations).

Algèbre de Lie $\simeq$ algèbre des commutateurs entre générateurs.

Représentations linéaires : on envoie les éléments g du groupe sur des matrices $D(g)$ — ou sur des opérateurs différentiels — de telle façon que la loi de groupe soit reproduite par la multiplication matricielle :

$$D(g_1)\,.\,D(g_2) = D(g_1 * g_2)$$

Espace de représentation : Les matrices $D(g)$ peuvent être interprétées comme des opérateurs linéaires agissant dans un espace vectoriel (de dimension, la dimension des matrices $D(g)$). Cet espace vectoriel est appelé espace de représentation. On dit que les objets qui se transforment par les $D(g)$ engendrent la représentation $\{D(g)\}$ du groupe G. L'espace de Hilbert des états d'un système quantique est un espace de représentation pour les groupes de symétrie du système. Les kets d'états engendrent des représentations (en fait des représentations projectives) de ces groupes de symétrie.

Représentations équivalentes: $\{D(g)\}$ et $\{D'(g)\}$ sont dites équivalentes si l'on peut par un même changement de base dans l'espace de représentation, passer des $D(g)$ aux $D'(g)$, $\forall g$:

$$\exists P / \forall g \in G, \quad D'(g) = P^{-1}\, D(g)\, P.$$

Dans ce cas, les opérateurs linéaires représentés par les $D(g)$ et $D'(g)$ sont identiques pour tout g.

Représentation réductible: $\{D(g)\}$ est dite réductible si elle est équivalente à une représentation diagonale par blocs pour tout g.

Groupe SO(3) $= \{R(\vec{\theta})\}$, ${}^tR = R^{-1}$ et $\det R = +1$.

- $R(\vec{\theta}) = \exp(i\vec{\theta}\,.\,\vec{J})$. 3 paramètres $\theta_i \Longrightarrow$ 3 générateurs J_i (hermitiens).
- Algèbre de Lie:

$$\Big[J_i, J_j\Big] = i \sum_k \epsilon_{ijk} J_k$$

- Un opérateur de Casimir (i.e proportionnel à l'unité dans chaque représentation): $\vec{J}^{\,2} = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$. Le coefficient de proportionnalité dépend de la représentation: $\vec{J}^{\,2} = j(j+1)\mathbb{1}$ avec j *entier*. la dimension de chaque représentation est $2j+1$ et les vecteurs de base dans chaque représentation sont étiquetés par j et $m = -j, -j+1, \ldots, +j$= valeurs propres possibles de J_z dans la représentation j.
- En coordonnées cartésiennes, la représentation vectorielle, i.e. $j = 1$, a comme générateurs:

$$J_x = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & -i \\ . & i & . \end{pmatrix} \quad ; \quad J_y = \begin{pmatrix} . & . & i \\ . & . & . \\ -i & . & . \end{pmatrix} \quad ; \quad J_z = \begin{pmatrix} . & -i & . \\ i & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

- Dans la base sphérique, J_z est diagonale avec comme valeurs propres $1, 0, -1$.
- Les générateurs sont des opérateurs vectoriels, vérifiant donc: $R^{-1} J_i R = R_{ij} J_j$ (sommation sous entendue).

Groupe SU(2)$= \{U(\vec{\theta})\}$, $U^\dagger = U^{-1}$ et $\det U = +1$.

- $U(\vec{\theta}) = \exp(i\vec{\theta}\,.\,\vec{\sigma}/2) = \cos\frac{\theta}{2} + i \sin\frac{\theta}{2}\,\vec{n}\,.\,\vec{\sigma}$ où $\vec{\theta} = \theta\vec{n}$.
- Même algèbre de Lie que $SO(3)$: $\Big[\sigma_i/2, \sigma_j/2\Big] = i \sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k/2$ (c'est le groupe de recouvrement universel de $SO(3)$). Les $\sigma_i/2$ sont les générateurs de $SU(2)$.
- Base où σ_z est diagonale: $\sigma_x = \begin{pmatrix} . & 1 \\ 1 & . \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} . & -i \\ i & . \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & . \\ . & -1 \end{pmatrix}$.

- $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k$.
- $U \in SU(2) \iff U = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$ avec $\det U = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 1$
- Les objets à deux composantes complexes qui se transforment par $SU(2)$: $z'_i = \sum_j U_{ij} z_j$ sont appelés spineurs.
- Les matrices $U(\vec{\theta})$ et $-U(\vec{\theta}) = U\Big((\theta + 2\pi)\vec{n}\Big)$ sont envoyées sur la même matrice $R(\vec{\theta})$ de $SO(3)$ par le morphisme :

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left(\sigma_i U \sigma_j U^\dagger \right).$$

- Les σ_i forment un opérateur vectoriel : $U^\dagger \sigma_i U = \sum_j R_{ij} \sigma_j$.
- Si Z est un spineur alors $\vec{V} = Z^\dagger \vec{\sigma} Z$ est un vecteur et $S = Z^\dagger Z$ est un scalaire.
- ϵ_{ij} est un tenseur (antisymétrique) invariant de $SU(2)$, c'est à dire qu'il vérifie $\epsilon_{ij} = \sum_{kl} U_{ik} U_{jl} \epsilon_{kl}$. Ceci montre également que la complexe conjuguée de $SU(2)$ est une représentation équivalente à $SU(2)$.
- z_i et z'_i étant les composantes de deux spineurs, le produit tensoriel $z_i z'_j$ se décompose en une partie vectorielle qui est le produit symétrisé $(z_i z'_j + z_j z'_i)/2$ et une partie scalaire qui est le produit antisymétrisé $(z_i z'_j - z_j z'_i)/2$ et qui est proportionnelle au tenseur antisymétrique ϵ_{ij}.

Tenseurs. Le caractère tensoriel est relatif à un groupe de transformations.

Pour $SO(3)$ par exemple, on définit un tenseur T de rang p par :

$$T = \sum_{i_1..i_p} T_{i_1..i_p} \, \vec{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_p}$$

Dans une rotation passive, où T est invariant, les composantes $T_{i_1..i_p}$ se transforment par :

$$T'_{i_1..i_p} = \sum_{j_1..j_p} R_{i_1 j_1} \ldots R_{i_p j_p} \, T_{j_1..j_p}$$

Ceci se généralise directement au cas de $SU(2)$ pour lequel on appelle parfois les tenseurs des multispineurs puisqu'ils portent p indices spinoriels. En général, un tenseur de rang p engendre une représentation réductible, cf. le produit de deux spineurs. Pour le groupe de Lorentz, on définit également des tenseurs de la même manière, mais il est en plus commode de définir des tenseurs mixtes, p_1 fois covariants et p_2 fois contravariants (voir la suite).

Transformations des champs dans les rotations. On définit, pour le groupe des rotations : $\vec{L} = -i\vec{x} \wedge \vec{\nabla} \iff L_i = -i \sum_k \epsilon_{ijk} \, x_j \, \partial_k$. $\vec{L}$ vérifie la même algèbre de Lie que les générateurs du groupe des rotations. Un champ de tenseurs $T(\vec{x})$, défini sur l'espace euclidien à trois dimensions, voit ses composantes se transformer dans une rotation passive par :

$$T'_i(x) = \sum_j \left[e^{i\vec{\theta}\,.\,(\vec{L}+\vec{S})} \right]_{ij} T_j(x)$$

avec $\vec{S}$ l'opérateur matriciel représentant le générateur des rotations dans la représentation engendrée par T (le spin de T en quantique) : $\vec{S} = \vec{0}$ pour un champ de scalaire, $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ pour un champ de spineur, etc... Une autre forme de la même relation est :

$$T'_i(x') = \sum_j \left[e^{i\vec{\theta}\,.\,\vec{S}} \right]_{ij} T_j(x)$$

Ceci se transpose directement aux transformations de Lorentz.

Théorème de Wigner. Dans un espace de Hilbert, si l'on a une application U qui envoie $|\psi\rangle$ sur $|\psi'\rangle$ en conservant les modules des produits scalaires, alors cette application est soit linéaire et unitaire soit anti-linéaire et unitaire :

$$|\langle\phi|\psi\rangle| = |\langle\phi'|\psi'\rangle| \quad \Longleftrightarrow \quad |\psi'\rangle = U|\psi\rangle$$

Comme une symétrie conserve les produits scalaires, les U forment des représentations des groupes de symétrie. En fait, il s'agit de représentations projectives (i.e. à une phase près). Les représentations projectives des groupes de symétrie qui nous intéressent, sont des représentations vraies de leur groupe de recouvrement universel. D'où, par exemple, l'intérêt de $SU(2)$ en mécanique quantique.

Principe de correspondance, Opérateurs tensoriels. On postule que les valeurs moyennes des observables quantiques se transforment comme les quantités classiques. Par exemple, si T est un tenseur classique (pas un opérateur) de $SO(3)$ engendrant la représentation M de ce groupe, alors son analogue quantique, nommé de façon identique par abus de langage, obéit par hypothèse à :

$$\Big(\langle\psi|T_\alpha|\psi\rangle \Big)' = {M_\alpha}^\beta \, \langle\psi|T_\beta|\psi\rangle$$

En choisissant de changer les kets par Wigner et en gardant fixes les opérateurs, il doit donc vérifier :

$$U^\dagger(\vec{\theta})\, T_\alpha\, U(\vec{\theta}) = {M(\vec{\theta})_\alpha}^\beta\, T_\beta$$

Ceci est la définition d'un opérateur tensoriel. On peut transposer sans problème cette relation au groupe des translations et de Lorentz.

Symétries. Le fait d'avoir une symétrie contraint la dynamique du système.

• En représentation de Schrödinger, ceci se traduit par : $[H(t), U(t)] + i\partial U/\partial t = 0$ où U est l'opérateur de Wigner effectuant, dans le point de vue passif, la transformation des états. Si U est indépendant du temps :

$$[H(t), U] = 0]$$

• En représentation de Heisenberg, ceci se traduit par le fait que la transformation des états (i.e. U) est indépendante du temps :

$$\frac{dU^H}{dt} = 0$$

et que les deux observateurs se servent des mêmes opérateurs pour une grandeur physique donnée, comme en Schrödinger.

• Les relations de commutation canoniques entre les observables de l'ensemble irréductible sont déterminées par les symétries, en tout cas pour ce qui est de la particule galiléenne (ce n'est plus que partiellement vrai en théorie quantique des champs). En particulier, $[X, P] = i$ est une conséquence de l'invariance par translation (et du principe de correspondance, bien entendu).

Espace de Minkowski. Il s'agit d'un espace à quatre dimensions, réel, muni d'un produit scalaire entre vecteurs de base $\{\underline{e}_\mu\}, \mu = 0, \ldots, 3$:

$$\underline{e}_\mu . \underline{e}_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad \text{où} \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

• Le carré de la distance entre deux points voisins est définie par :
$ds^2 = \underline{dx}.\underline{dx} = dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} = dx^\mu dx_\mu$ où l'on a utilisé la convention d'Einstein.
Les coordonnées d'un point sont : $x^0 = t \quad , \quad x^1 = x \quad , \quad x^2 = y \quad , \quad x^3 = z$

• Un quadri-vecteur : $\underline{A} = A^\mu \underline{e}_\mu$

• Coordonnées co et contra- variantes : A_μ et $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu$.

• Produit scalaire : $\underline{A} \,.\, \underline{B} = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$.

• Gradient : $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu = \eta_{\mu\nu}\partial^\nu = \eta_{\mu\nu}\partial/\partial x_\nu$.

Transformations de Lorentz et translations :

$$ds^2 = ds'^2 \iff x'^\alpha = \Lambda^{\alpha}_{\cdot\,\beta}\, x^\beta + a^\alpha \quad \text{avec} \quad \eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha}_{\cdot\,\mu}\Lambda^{\beta}_{\cdot\,\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

On a par définition de $\Lambda_{\mu}^{\cdot\,\nu}$: $\quad \Lambda_{\mu}^{\cdot\,\nu}\Lambda^{\rho}_{\cdot\,\nu} = \delta^\rho_\mu$.

• $A'^\mu = \Lambda^{\mu}_{\cdot\,\nu} A^\nu \quad , \quad A'_\mu = \Lambda_{\mu}^{\cdot\,\nu} A_\nu$.

- Boost suivant Ox : $\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & & \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$, $v = \tanh\phi$
- Pour une transformation de Lorentz infinitésimale : $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu$ avec $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$

$$\begin{cases} \epsilon^0{}_i = \epsilon^i{}_0 \\ \epsilon^i{}_j = -\epsilon^j{}_i \end{cases} \Longrightarrow \epsilon^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -d\phi_1 & -d\phi_2 & -d\phi_3 \\ -d\phi_1 & 0 & d\theta_3 & -d\theta_2 \\ -d\phi_2 & -d\theta_3 & 0 & d\theta_1 \\ -d\phi_3 & d\theta_2 & -d\theta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\Lambda = e^{-\vec{\phi}.\vec{K}+i\vec{\theta}.\vec{J}} = e^{-\frac{1}{2}i\theta_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}}$ avec $J_{0i} = -iK_i$, $J_{ij} = \epsilon_{ijk}J_k$.

$K_x = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$; $K_y = \begin{pmatrix} . & . & 1 & . \\ . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$; $K_z = \begin{pmatrix} . & . & . & 1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \end{pmatrix}$

- Algèbre de Lie du groupe de Lorentz :

$$\left[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}\right] = i\left(\eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}\right)$$

Elle peut aussi s'écrire : $[J_x, K_x] = 0, [J_x, K_y] = iK_z, [K_x, K_y] = iK_z$. On peut la réécrire comme deux algèbres de Lie de $SU(2)$ indépendantes.

Représentations (1/2,0) et (0,1/2) de SO(3,1).

- $(0, 1/2)$: $\vec{J} = \vec{\sigma}/2$ et $\vec{K} = \vec{\sigma}/2 \implies M_2(\vec{\theta}, \vec{\phi}) = e^{-\vec{\phi}\,.\,\vec{\sigma}/2+i\vec{\theta}\,.\,\vec{\sigma}/2}$.
  $(1/2, 0)$: $\vec{J} = \vec{\sigma}/2$ et $\vec{K} = -\vec{\sigma}/2 \implies M_1(\vec{\theta}, \vec{\phi}) = e^{+\vec{\phi}\,.\,\vec{\sigma}/2+i\vec{\theta}\,.\,\vec{\sigma}/2}$.
  M_1 et $M_2 \in SL(2, \mathbb{C})$. Ce sont deux représentations inéquivalentes de $SL(2, \mathbb{C})$.
- $\{\bar{M}_1(\vec{\theta}, \vec{\phi})\}$ et $\{M_2(\vec{\theta}, \vec{\phi})\}$ sont des représentations équivalentes.
- La parité échange $(0, 1/2)$ et $(1/2, 0)$.

Bi-spineurs et Diracologie.

- Bi-spineur : $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ $\psi_\alpha : \alpha = 1, \ldots, 4$
- $\begin{cases} \left(\chi_L^\dagger\psi_L\,,\, \chi_L^\dagger\,\vec{\sigma}\,\psi_L\right) & \text{composantes covariantes d'un 4-vecteur} \\ \left(\chi_R^\dagger\psi_R\,,\, \chi_R^\dagger\,\vec{\sigma}\,\psi_R\right) & \text{composantes contravariantes d'un 4-vecteur} \end{cases}$
  $\chi_L^\dagger\psi_R$ et $\chi_R^\dagger\psi_L$ sont des scalaires.
- $\bar{\chi} = \chi^\dagger\gamma^0$ est le conjugué de Dirac de χ, $\bar{\chi}_\alpha = \chi_\beta^\dagger(\gamma^0)_{\beta\alpha}$
- $S = \bar{\chi}\psi$ est un (vrai scalaire).

- $P = \bar{\chi}\gamma^5\psi$ est un pseudo-scalaire.
- $V^\mu = \bar{\chi}\gamma^\mu\psi$ est un (vrai) quadrivecteur.
- $A^\mu = \bar{\chi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ est un pseudo-quadrivecteur
- En représentation de Weyl:

$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & \\ & \mathbb{1} \end{pmatrix}$

En représentation de Dirac:

$\gamma^0_D = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \\ & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i_D = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5_D = \begin{pmatrix} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \end{pmatrix}$

- Algèbre de Clifford et propriétés des matrices γ^μ:

$$\begin{cases} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1} \\ \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \\ (\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \\ \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad , \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i = \gamma^0\gamma^i\gamma^0 \quad , \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \end{cases}$$

- $\dfrac{\mathbb{1} \pm \gamma^5}{2}$ = projecteur sur les composantes droites et gauches.
- Changement de représentation: $\begin{cases} \chi' = U\chi \\ \gamma'^{\mu,5} = U\,\gamma^{\mu,5}\,U^\dagger \end{cases}$ U unitaire
- Transformation de Lorentz des bi-spineurs:

$$\chi' = S(\Lambda)\chi \qquad S(\Lambda) = \exp(-\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}/2)$$

avec $\sigma^{\mu\nu} = i/2\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$

Transformations de Lorentz des champs. $J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}$ avec $L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$. $L^{\mu\nu}$ est la partie orbitale et $S^{\mu\nu}$ la partie de "spin" : $S^{\mu\nu} = 0, \sigma^{\mu\nu}/2$ etc... suivant que le champ est scalaire, spinoriel, ... Pour un champ:

$$T'_\alpha(x_\rho) = \left[e^{-\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}\right]_\alpha^{\ \beta} T_\beta(x_\rho)$$

où l'on prend $J^{\mu\nu}$ dans la représentation correspondant à la nature tensorielle de T_α.

Translations: On appelle P_μ le générateur des translations. P_μ est représenté, dans son action sur les fonctions de x, par $i\partial_\mu$.

Algèbre de Lie de Poincaré. Il s'agit de celle de Lorentz à laquelle on ajoute:

$$\begin{cases} [P_\mu, P_\nu] = 0 \\ [P_\mu, L_{\rho\sigma}] = i\,(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho) \end{cases}$$

Opérateurs de Casimir du groupe de Poincaré. Il y en a deux: $P^2 = m^2$ et $W^2 = -m^2 s(s+1)$ avec $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}L^{\nu\rho}P^\sigma$. Pour les particules de masse nulle comme le photon, seules deux projections du spin, $\pm s$, existent.